Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 517.953.5 На правах рукописи

СУЛТАНГАЗИЕВА ЖАНАТ БОЛАТБАЕВНА

Разрешимость нелокальных краевых задач для квазигиперболических уравнений четвертого и шестого порядков

6D060100 – Математика
Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор
Б.Д. Кошанов
Зарубежный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор
А.И. Кожанов
(НГУ, Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН)

Республика Казахстан
Алматы, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{R}^n$– n мерное пространство, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ -\infty < x_k < \infty\}$
Ω – область в $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$ – граница области Ω
$Q = \{(x,t): x \in \Omega, \mathrm{t} \in (0,T)\}$ – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$
$S = \{(x,t): x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}$ – боковая поверхность Q
t – временная переменная
m, n - натуральные числа
A – дифференциальный оператор
$u(x,t)$ – искомая функция, решение уравнения (задачи) математической физики
$a^{ij}(x), i,j = 1, \dots, n, a(x), f(x,t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T]$
$L_2(Q)$ – квадратично суммируемые функций в области Q по мере Лебега
$W_2^{2,m}(Q)$ – пространство, состоящее из всех функции $L_2(Q)$ и имеющих принадлежащие этому же пространству обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по временной переменной t до порядка m включительно
$V_2^{2,m}$ – линейное множество функций, принадлежащих пространству $W_2^{2,m}(Q)$
$\int_\Omega u(x)dx$ – интеграл по Ω переменной x
$\int_Q u(x,t)dxdt$ – интеграл Q по переменным x, t
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1$ – заданные действительные числа
γ_0 – постоянная, которая определяется лишь областью Ω
$\gamma_1 = a_0\gamma_0^{-1} - \max_{\overline{\Omega}} a(x)$
$a_0, a_1 -$ нижний, верхний коэффициент эллиптичности оператора A
$p_0 = (2\alpha_1 + \alpha_2^2)\gamma_1 + \alpha_0^2,$
$p_1 = \left(\frac{3}{T} - 2\alpha_1\right)\gamma_1,$

$P(\theta) = p_0\theta^2 - p_1\theta + \gamma_1, \theta -$ переменная.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. В данной диссертационной работе исследуются вопросы разрешимости краевых задач для уравнения четвертого и шестого порядков квазигиперболического типа.

Основные концепции теории уравнений математической физики сформировались в процессе изучения классических задач и на данный момент хорошо изучены. Однако современные проблемы в науке требуют формулировки и анализа качественно новых задач, примером которых является задачи класса квазигиперболических уравнений.

Обзор литературы указывает на значимость исследования свойств корректности краевых задач для уравнений математической физики, как с теоретической, так и с практической точек зрения, в контексте их применения в различных областях физики, механики и моделирования. Особое внимание уделяется теории краевых задач для уравнений высокого порядка квазигиперболического типа, привлекая внимание математиков.

Рассматриваются дифференциальные уравнения следующего вида

$$Lu \equiv (-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + \Delta u + c(x,t)u = \lambda u + f(x,t),\ x \in \Omega, t \in (0,T), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T), 0 < T < +\infty,\ p$ – натуральное число, λ – действительное число, $c(x,t), f(x,t)$ – заданные функций.

В случае $p = 1$ данная уравнения представляют собой обычные гиперболическое уравнения, в случае же $p > 1$ они теряют многие свойства гиперболических уравнений (например, задача Коши или же начально-краевая задача с заданием $2p$ условий при $t = 0$ для них будут некорректной). Такие уравнения для $p > 1$ по аналогии с квазиэллиптическими уравнениями будем называть квазигиперболическими уравнениями.

Впервые В.Н. Врагов [1,2] предложил постановку корректной смешанной задачи для таких уравнений. Что же касается нелокальных краевых задач в целом и задач с интегральными по временной переменной условиями в частности, то подобные исследования для уравнений (1) в случае $p > 1$ ранее не проводились.

Дальнейшие исследования дифференциальных уравнений, которые включают операторы аналогичные оператору L, были проведены в работах [3-9] и других источниках. В этих исследованиях одно из основных условий, необходимых для обеспечения корректности, состояло в не отрицательности параметра λ.

В последнее время было уделено активное внимание исследованию нелокальных задач с интегральными условиями, относящихся к линейным уравнениям параболического типа, дифференциальным уравнениям нечетного порядка и определенным классам нестационарных уравнений. В этой области работы А.И. Кожанова имеют особую значимость и внесли значительный вклад в современные исследования.

В работе [9] исследуется разрешимость задачи двух типов для уравнений четвертого порядка квазигиперболического типа при $p = 2$. В работе [10] были получены теоремы о существовании и единственности для новых краевых задач при $p = 2$. А в работе [11] были получены теоремы о существовании и единственности для нелокальных краевых задач при $p = 3$.

При исследованиях подобного рода нелокальных задач обычно применяются методы продолжения по параметру, априорной оценки и предельного перехода. Для уравнения гиперболического типа метод продолжения по параметру не применим, так как будут потеряны гладкости правой части уравнения.

Интерес представляет вопрос единственности решения для дифференциально-операторного уравнения следующего вида

$$Lu \equiv Bu - A(x, D)u = f(x,t),\ x \in \Omega,\ \ 0 < t < T, \qquad (2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная ограниченная n– мерная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Здесь $Bu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}}$, $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$— произвольный формально самосопряженный эллиптический оператор порядка $m = 2l$ с довольно общими граничными операторами B_j, подчиненный известным условиям Агмона [12]. Коэффициенты $a_\alpha(x)$ – достаточно гладкие функции, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) -$ мульти индекс, $D^\alpha = (D_1, \dots, D_d)$ $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

При $p = 1$ и $m = 2$ в случае смешанной задачи для уравнения гиперболического типа вопрос единственности изучен в известной работе В.А. Ильина [13]. В данном работе предложен универсальный метод доказательства единственности решения для уравнений гиперболических и параболических типов. При достаточно общих ограничениях на область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ в работе [13] была доказана теорема о единственности решения для уравнений гиперболических и параболических типов. Одно из основных условий, предложенных В.А. Ильиным в его теореме [13], состоит в том, что эллиптическая часть гиперболического или параболического оператора должна обладать полной ортогональной системой собственных функций в соответствующем функциональном пространстве. Это требование играет существенную роль в обеспечении единственности решения для данных операторов.

Когда $p = 1$ и m – произвольное натуральное число единственность решения смешанных задач для уравнений гиперболического типа, эллиптическая часть которых имеет наиболее общий вид и определена в произвольной ограниченной многомерной области с достаточно гладкой границей доказана в работе [14].

Случай $2p = 1$ и абстрактного линейного оператора A в банаховом пространстве E вопрос единственности решения нелокальной задачи

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t)d\mu(t) = u_1 \in E \tag{3}$$

исследован в работе И.В. Тихонова [15]. В дальнейшем в работе [16] в случае, когда оператор A является оператором Лапласа, найден точный класс единственности решения задачи (3).

Вопросы корректной разрешимости в случае, когда $p = 2$ и $A(x, D) = (-1)^p(\Delta - \lambda I)$ изучены в работе [4]. Некоторые обобщения результатов работы [4] в новых постановках можно найти в работах [10,11].

И.В. Тихонов [15] провел интересное исследование, посвященное теоремам единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений. В его работе был предложен новый метод доказательства теорем единственности, основанный на "методе частных" для целых функций экспоненциального типа. Этот метод представляет собой новый подход к исследованию единственности решений и дает возможность получить новые результаты в данной области. Работа И.В. Тихонова внесла значительный вклад в развитие теории единственности в нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений.

В работе проведен [16] анализ проблемы единственности решения уравнения теплопроводности с нелокальным условием, выраженным интегралом времени в фиксированном отрезке. Автору удалось полностью охарактеризовать классы единственности с точки зрения поведения решений |x|→∞. Особенно интересно то, что в данной работе был адаптирован метод И.В. Тихонова для операторов, чья дифференциальная часть является оператором высшего порядка. Это позволило получить новые результаты и применить методику, разработанную И.В. Тихоновым, в контексте уравнения теплопроводности с нелокальным условием.

В работе [17] для дифференциально- операторного уравнения (2), когда оператор A удовлетворяет условию Агмона при произвольных натуральных p и m доказана единственность решения нелокальных по времени t и достаточно общих граничных условии по пространственным переменным x задач для уравнения (2).

В работе [17] использован гибридный метод для доказательства теоремы единственности решения. Этот метод сочетает элементы метода направляющих функционалов М.Г. Крейна [18] и метода В.А. Ильина [13].

Установление критерия единственности решения смешанных задач для дифференциально - операторного уравнения (2) достигаются различными способами.

В литературе существует несколько способов доказательства единственности решений. Один из наиболее эффективных методов — это использование принципа максимума [19] и его различных обобщений, таких как принципы Хопфа [20] и Зарембы-Жиро [21]. Эти принципы широко применяются в доказательствах единственности и позволяют получить существенные результаты в этой области.

В работе [22] для дифференциально- операторного уравнения (2) когда оператор A является порожденной уравнением Трикоми

$$Av(\cdot) = yv_{xx}(\cdot) + v_{yy}(\cdot)$$

указанные принципы не выполняются. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части [23,24] и дробными производными следами решения вдоль характеристик [25].

Так как принцип экстремума может быть ограничен в своей применимости, для исследования единственности решений может потребоваться использование других методов и инструментов. Возможными альтернативами могут быть методы конструктивной топологии, функционального анализа, теории операторов и других ветвей математики. Эти подходы могут предоставить дополнительные инструменты для анализа и доказательства единственности решений в конкретных ситуациях, где принцип экстремума не может быть непосредственно применен.

В работе [22] было установлено, что оператор L, связанный с уравнением (2), может быть представлен в виде разности двух коммутирующих операторов A и B. Важно отметить, что для обеспечения гарантированной единственности решения необходимо выполнение двух условий. Во-первых, спектры операторов А и В не должны пересекаться, что означает, что нет общих собственных значений для этих операторов. Это условие гарантирует отсутствие линейной зависимости между собственными функциями операторов А и В. Во-вторых, оба оператора А и В должны иметь полные системы корневых элементов в соответствующих функциональных пространствах. Полная система корневых элементов означает, что она охватывает все собственные функции операторов А и В, а также достаточно богата для представления любой функции из рассматриваемого пространства. Эти условия обеспечивают уникальность решения задачи, связанной с оператором L. Заметим, что оператор B не обязательно должен быть самосопряженным. Это означает, что для доказательства единственности решения в данной работе не требуется, чтобы оператор В был самосопряженным. Здесь использованы фундаментальные результаты Т.Ш. Кальменова [23, 24] о полноте собственных функций задач для уравнения Трикоми, а также результаты Г.М. Кесельмана [27] о безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов.

Операторы вида $L = B - A$, которые исследуются, принадлежат к классу операторов, порожденных дифференциально-операторными уравнениями. Этот терминологический подход предложен А.А. Дезиным [28] и используется для описания операторов, которые возникают в контексте дифференциально-операторных уравнений. Исследования, связанные с этим классом операторов, были проведены в работах А.А. Дезина и других источниках [29-32], где изучались вопросы разрешимости дифференциально-операторных уравнений.

В работах [33, 34] В. В. Шелухин исследовал проблему прогнозирования температуры океана на основе средних данных за предыдущий период времени. Эта задача относится к классу дифференциально-операторных уравнений, где операторы, описывающие процессы в океане, комбинируются с дифференциальными операторами, учитывающими эволюцию температуры во времени и пространстве. Исследования В.В. Шелухина затрагивали вопросы разрешимости и анализа таких дифференциально-операторных уравнений в контексте прогнозирования температуры океана.

Нелокальные краевые задачи с интегральными по временной переменной условиями для уравнений второго порядка гиперболического типа ранее изучались в работах [35-37]. Вместе с тем заметим, что методы этих работ непосредственно на уравнения (1) в случае $p > 1$ не переносятся (в частности, вследствие потери гладкости правой части уравнения).

Частично выполнить данный пробел ставит целью автор данной диссертационной работы.

Основная цель исследования - формулировка и исследования локальных и нелокальных краевых задач для уравнений квазигиперболического типа с операторами четвертого и высокого порядка; установление теорем единственности и существования нелокальных с интегральными условиями и новых краевых задач для уравнения квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка.

Задачи исследования:

1. Формулировка и изучение разрешимости нелокальных смешанных задач с интегральными условиями относительно переменных времени для уравнений квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка;

2. Формулировка и установка теорем об единственности и существовании решения новых смешанных задач для уравнений квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка;

3. Установление разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения с оператором четвертого порядка по пространственному переменному гиперболического типа.

4. Установления теорем единственности и существования нелокальных краевых задач для уравнений шестого порядка квазигиперболического типа;

5. Установление влияния спектрального параметра λ на корректность нелокальных краевых задач для уравнений шестого порядка квазигиперболического типа.

Объект исследования: локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений четвертого и высокого порядков квазигиперболического типа.

Предмет исследования: корректность локальных и нелокальных краевых задач для уравнений четвертого и высокого порядков квазигиперболического типа.

Методика исследования: на первом этапе исследования доказывается единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнение второго порядка гиперболического типа. При исследовании нелокальных задач подобного рода часто используются методы продолжения по параметру, априорной оценки и предельный переход. Применение этих методов позволяет исследовать различные аспекты нелокальных задач и получать информацию о свойствах их решений. Для уравнения гиперболического типа метод продолжения по параметру не применим, так как будут потеряна гладкости правой части уравнения.

При доказательстве теорем разрешимости решении нелокальных краевых задач для уравнений квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка применяются методы продолжения по параметру, априорной оценки, предельный переход и метод Фурье. А также неравенства Коши-Буняковского и Юнга, метод Галеркина с использованием специально выбранного базиса.

Научная новизна. Доказаны теоремы о существовании и единственности для решения нелокальной краевой задачи для уравнения квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения для нелокальной краевой задачи для уравнения квазигиперболического типа с операторами более высокого порядка.

Теоретическая и практическая ценность работы. Результаты диссертации имеют теоретический характер и связаны с разработкой методики исследования ряда краевых задач для уравнения четвертого порядка квазигиперболического типа. В рамках диссертационной работы проведены исследования указанных задач в определенных функциональных пространствах.

Методика исследования, разработанная в диссертации, представляет собой набор подходов и инструментов, которые позволяют анализировать решения краевых задач для уравнения четвертого порядка квазигиперболического типа. Данная методика может включать в себя выбор подходящих функциональных пространств, применение определенных методов и техник математического анализа, а также проведение доказательств и установление свойств решений.

В процессе исследования ряда краевых задач для уравнения четвертого порядка квазигиперболического типа в определенных функциональных пространствах были получены результаты, связанные с существованием, единственностью, устойчивостью или другими свойствами решений. Эти результаты могут иметь важное значение для понимания поведения и свойств решений данного типа уравнений и могут быть применены в различных областях физики, механики или моделирования, где уравнения четвертого порядка квазигиперболического типа возникают в качестве математической модели.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. Даны постановки и установлены теоремы о единственности и существовании решении нелокальных краевых задач с интегральными условиями по временной переменной для уравнений четвертого порядка квазигиперболического типа;

2. Даны постановки и установлены теоремы единственности и существования решения новых смешанных задач для уравнений четвертого порядка квазигиперболического типа;

3. Установлена корректность нелокальной краевой задачи для уравнения гиперболического типа с оператором четвертого порядка по пространственному переменному.

4. Установлены теоремы о единственности и существования решении нелокальных краевых задач для уравнений шестого порядка квазигиперболического типа;

5. Установлены влияния спектрального параметра λ на разрешимости нелокальных смешанных задач для уравнений шестого порядка квазигиперболического типа.

Достоверность и обоснованность проведенных исследований обеспечиваются конструктивностью разработанных и использованных методов. Вспомогательные утверждения, связанные с рассматриваемыми проблемными вопросами, сформулированы в виде лемм и утверждений, и каждое из них строго доказано. Эти вспомогательные результаты представляют собой промежуточные шаги, необходимые для построения более общих выводов и теоретических результатов.

Общие утверждения и теоремы, связанные с исследуемыми проблемными вопросами, также представлены в развернутом изложении. Каждая теорема сформулирована ясно и точно, а ее доказательство представлено в подробной форме. Доказательства обычно следуют из вспомогательных утверждений, лемм и ранее установленных результатов.

Подобный строгий подход к формулировке и доказательству вспомогательных утверждений, лемм, теорем и их развернутому изложению является важной составляющей диссертационного исследования. Он обеспечивает корректность и достоверность полученных результатов, а также позволяет другим исследователям воспроизвести и использовать эти результаты в своих работах.

Апробация работы. По результатам диссертации были сделаны доклады (Приложение А):

- на международных конференциях:

1. Международной научной конференции, посвященной 90-летию Сергея Константиновича Годунова «Математика в приложениях» (Новосибирск: Академгородок, 2019. – 4-10 августа).

2. Международной научной конференция, посвященной 70-летию д.ф.–м.н., профессора Мурата Ибраевича Рамазанова «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (Караганда: Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, 2019. – 12-14 июня).

3. Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж: 2021. – 28 января – 2 февраля).

4. Традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки РК, посвященной 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова (Алматы: ИМММ, 2021).

- на семинаре под руководством профоссора Кожанова А.И. (ИМ им.С.Л.Соболева СО РАН, 2023 через ZOOM),

- на семинаре под руководством академика НАН РК Отелбаева М.О., профессора Бердышева А.С., профессора Кошанова Б.Д. (КазНПУ им. Абая, 2020).

- на семинаре под руководством профессора Кангужина Б.Е., профессора Кошанова Б.Д. (КазНУ им. Аль-Фараби, 2023).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [10,11], [50,51]: 4 статей и 3 тезисов. Из них две статьи – в журналах с процентилем более 35, входящих в базу Scopus.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы и приложений.

Нумерация формул в разделах трехзначная, первое число означает номер раздела, второе – номер подраздела, третье – собственный номер формулы внутри подраздела, а нумерация теорем, утверждений и замечаний двухзначная: первое число – номер раздела, второе-собственный номер внутри раздела.

Краткое содержание работы

В **первом разделе** рассматривается нелокальная краевая задача для уравнений четвертого порядка квазигиперболического типа с интегральным условием в цилиндрической области $Q = \Omega \times [0,T]$:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \Delta u + c(x,t)u = \lambda u + f(x,t), (x,t) \in Q, \tag{4}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Цель данного раздела диссертационной работы состоит в исследовании разрешимости нелокальных задач типа I в классах регулярных решений. Здесь под регулярными решениями понимаются решения, для которых все обобщенные производные, входящие в уравнение, существуют и являются функциями, обладающими свойствами С.Л. Соболева.

В рамках исследования будет изучено влияние спектрального параметра λ на единственность решений нелокальной задачи. Это позволит определить, при каких условиях задача имеет единственное решение, а при каких может иметь несколько решений.

Также будут исследованы вопросы существования решений нелокальной задачи. Это позволит определить, при каких условиях задача имеет хотя бы одно решение, а при каких решений не существует.

В результате исследования будет получено более полное понимание разрешимости нелокальных задач типа I в классах регулярных решений и их свойств в зависимости от спектрального параметра λ.

В случае $c(x,t) \equiv 0$ изучим вопрос о влиянии параметра λ на разрешимость нелокальной задачи I.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательности собственных функций и соответствующих им несобственных чисел задачи

$$\Delta w(x) = \mu w(x), \qquad x \in \Omega, \qquad w(x)\,\Big|_{\Gamma} = 0$$

причем последовательность $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в пространстве $L_2(\Omega)$. Важно отметить, что функции $w_k(x) \in W_2{}^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W_2}{}^1(\Omega)$ являются базисом в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь Ω обозначает рассматриваемую область. Числа μ_k, соответствующие этим функциям, являются отрицательными и могут быть упорядочены в монотонно убывающую последовательность (предполагается, что такая упорядоченность была выполнена). Дополнительно, последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку, которая равна $-\infty$. Это означает, что значения μ_k стремятся к $-\infty$ по мере увеличения индекса k. Такое свойство последовательности μ_k может быть использовано для дальнейшего анализа исследуемых уравнений и операторов. В результате, базисные функции $w_k(x)$ и отрицательные значения μ_k, с предельной точкой $-\infty$, играют важную роль в анализе и исследовании рассматриваемых математических моделей. Эти свойства обеспечивают удобную основу для разложения функций и проведения аналитических и численных исследований в задачах, связанных с рассмотренными операторами и уравнениями.

Рассмотрим вначале случай $\lambda > \mu_1$. Определим числа $\gamma_k(\lambda)$ положительными, при которых выполняется $\gamma_k^4(\lambda) = \lambda - \mu_k$. Далее, определим функцию $\varphi_1(z)$ при $z \geq 0$:

$$\varphi_1(z) = e^z - e^{-z} - 2\sin z.$$

Для этой нелокальной задачи получены следующие теоремы

Теорема 1.2. *Допустим функция $N(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$, и пусть для фиксированного числа λ из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ выполняется условие*

$$\int_0^T N(t)\left[e^{\gamma_k(\lambda)t} - e^{-\gamma_k(\lambda)t} - 2\sin\gamma_k(\lambda)t\right]dt \neq 0, \quad k = 1,2, \ldots \tag{8}$$

Тогда нелокальная задача (4)-(7) *в случае* $c(x,t) \equiv 0$ *не может иметь в пространстве $W_2{}^{2,4}(Q)$ более одного решения.*

Рассмотрим теперь случай $\lambda \in (-\infty, \mu_1]$. Определим числа $\delta_k(\lambda), k = 1,2, \ldots$ и функцию $\psi_1(z)$:

$$\delta_k(\lambda) = |\mu_k - \lambda|^{1/4}, \qquad \delta_k > 0,$$

$$\psi_1(z) = (e^z - e^{-z})\cos z - (e^z + e^{-z})\sin z$$

Далее, для чисел λ из промежутка $(-\infty, \lambda_1]$ обозначим через $k_0(\lambda)$ натуральное число такое, что выполняется $\mu_{k_0(\lambda)+1} < \lambda < \mu_{k_0(\lambda)}$.

Теорема 1.3. *Пусть функция $N(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$, и пусть для фиксированного числа λ из промежутка $(-\infty, \mu_k)$ выполняются условия*

$$\lambda \neq \mu_k, \qquad k = 1,2,\ldots \tag{9}$$

$$\int_0^T N(t)\psi_1(\delta_k(\lambda)t)dt \neq 0, \quad k \neq 1,\ldots,k_0(\lambda), \tag{10}$$

$$\int_0^T N(t)\varphi_1(\gamma_k(\lambda)t)dt \neq 0, \quad k \neq k_0(\lambda)+1, k_0(\lambda)+2,\ldots, \tag{11}$$

либо же условия

$$\lambda = \mu_{k_0}, \tag{12}$$

$$\int_0^T N(t)\psi_1(\delta_k(\lambda)t)dt \neq 0, \quad k \neq 1,\ldots,k_0 - 1, \tag{13}$$

$$\int_0^T t^3 N(t) \neq 0, \tag{14}$$

а также условие (9). Тогда нелокальная задача (4)-(7) *в случае $c(x,t) \equiv 0$ не может иметь в пространстве ${W_2}^{2,4}(Q)$ более одного решения.*

Теорема 1.4. *Допустим выполняются следующие условия*

$$c(x,t) \equiv 0 \;\; \text{где } (x,t) \in \bar{Q}, \quad \lambda \in (\mu_1, +\infty); \tag{15}$$

$$N(t) \in C([0,T]), \; N(t) \geq N_0 t^m, \quad N_0 > 0, m \geq 0, \; t \in [0,T]. \tag{16}$$

Тогда для любой функция $f(x,t) \in L_2(0,T; {W_2}^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ нелокальная задача (4)-(6) *в пространстве $W_2^{2,4}(Q)$ имеет решение $u(x,t)$, причем ровно одно.*

Из введенных теорем выводим:

1. Для любого действительного числа λ существует бесконечно много непрерывных на отрезке $[0,T]$ функций $N(t)$ таких, что данное число λ будет собственным числом нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$ причем любой наперед заданной кратности.
2. Теоремы 1 и 2 дают условия того, что данное действительное число λ не является собственным числам нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$.

3. Теорема 3 посвящен к обсуждению вопроса о существовании решений нелокальной задачи.

Во **втором разделе** сформулированы постановки новых смешанных задач для уравнений квазигиперболического типа с оператором четвертого порядка. Для уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + Au = f(x,t) \tag{17}$$

исследована следующие краевые задачи I и II, где A – эллиптический дифференциальный оператор, который действие на заданной функции $\nu(x,t)$ определяется с использованием указанного равенства

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)v_{x_j}\right) + a(x)v$$

Предположим, что оператор *A* эллиптичен:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, a_0 > 0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть α_0, α_1, α_2, β_0 и β_1 есть заданные действительные числа, p – фиксированное натуральное число.

Краевая задача I: найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$ *уравнения* (*) *и удовлетворяющего начальным и граничным условия*

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, x \in \Omega, \tag{19}$$

$$u_{ttt}(x,T) = \alpha_0 u(x,T) + \alpha_1 u_t(x,T) + \alpha_2 u_{tt}(x,T), x \in \Omega, \tag{20}$$

и краевая задача II: найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$ *уравнения* (*) *и удовлетворяющего условию (18) а также следующих условии*

$$u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{21}$$

$$u_{tt}(x,T) = \beta_0 u(x,T) + \beta_1 u_t(x,T), \quad x \in \Omega. \tag{22}$$

Для данных задач I, II получены следующие теоремы единственности и существования.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть функция $w(x)$. Имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x)dx \leq \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x)dx, \tag{23}$$

постоянная γ_0 в котором определяется лишь областью Ω — см. [42] гл. II, §2; [43], гл. I, §8.

Если функции $w(x,t)$ и первые производные по временной переменной принадлежат пространству $L_2(Q)$, а также обращается в нуль при $t = 0$, то выполняется следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} w^2(x,T)dx \leq T \int_{Q} w_t^2 dxdt, \tag{24}$$

Неравенства (23) и (24) является необходимом при доказательстве теоремы.

Пусть

$$\gamma_1 = a_0\gamma_0^{-1} - \max_{\bar{\Omega}} a(x).$$

Определим квадратичные формы $G_0(\xi), G_1(\xi), G(\rho,\xi)$ для $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$, действительного числа ρ и из промежутка $(T, +\infty)$ числа T_0

$$G_0(\xi) = (T_0 - T)\xi_0^2 + \left[\frac{3}{T} - 2\alpha_1(T_0 - T)\right]\xi_1^2 + \gamma_1(T_0 - T)\xi_2^2 -$$

$$-2[1 + 2\alpha_2(T_0 - T)]\xi_0\xi_1 - 2\alpha_0(T_0 - T)\xi_1\xi_2,$$

$$G_1(\xi) = \frac{1}{T}\xi_1^2 + \alpha_0\xi_2^2 - \xi_0\xi_1 + \alpha_1\xi_1\xi_2 + \alpha_2\xi_0\xi_2,$$

$$G(\rho,\xi) = G_0(\xi) + \rho G_1(\xi).$$

Теорема 2.1 *Пусть существуют числа* T_0 и ρ_0 *такие, что* $T_0 > T$, $\rho_0 \in (-3,1)$ *и выполняются следующие условия*

$$a^{ij}(x) \in C^1(\Omega), a^{ij}(x) = a^{ji}(x), i,j = 1,\dots,n, x \in \bar{\Omega}; \tag{25}$$

$$a_0|\eta|^2 \leq a^{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq a_1|\eta|^2, a_0 > 0, a_1 > 0, x \in \bar{\Omega}, \eta \in \mathbb{R}^n; \tag{26}$$

$$a(x) \in C(\bar{\Omega}), a(x) \leq 0, \text{при } x \in \bar{\Omega}; \tag{27}$$

$$G(\rho_0;\xi) \geq 0 \textit{ при } \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{28}$$

тогда краевая задача I в пространстве $V_2^{2,4}$ *не может иметь более одного решения.* [10]

Примем

$$p_0 = (2\alpha_1 + \alpha_2^2)\gamma_1 + \alpha_0^2, \quad p_1 = \left(\frac{3}{T} - 2\alpha_1\right)\gamma_1,$$

$$P(\tau) = p_0\tau^2 - p_1\tau + \gamma_1.$$

Давайте определим значения α_0, α_1 и α_2, при которых можно найти положительные числа τ, при которых будет выполняться следующее условие

$$P(\tau) \leq 0,\ \frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0. \tag{29}$$

Если

$$p_0 < 0 \tag{30}$$

тогда можно найти неотрицательное число τ^* такое, что по условии τ больше τ^* следует первое неравенство (29). После того, число α_1 должно быть отрицательным, из условии (30). То есть при условии $\tau > 0$ неравенство $\frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0$ будет выполняться автоматически.

Теорема 2.2. *При выполнении условии (25)–(27), и одного из условий а), б) или в)*

$$а)\ p_0 < 0;$$

$$б)\ p_0 = 0, p_1 > 0;$$

$$в)\ p_0 > 0, p_1 > 0, p_1^2 - 4\gamma_1 p_0 \geq 0, \alpha_1\theta_2 < \frac{3}{2T}.$$

утверждается, что в пространстве $V_2^{2,4}$краевая задача I не может иметь более одного решения. [10]

Рассмотрим неравенство

$$2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Тогда квадратное уравнение

$$\alpha_0^2 T\tau^2 - \gamma_1\tau + 2\alpha_0 = 0$$

не имеет отрицательное корни. Пусть $\bar{\tau}_2$ будет наибольшая корень из квадратного уравнения.

Теорема 2.3. *Если условия* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *и* $2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}, 2\alpha_0 < \gamma_1\bar{\tau}_2$ *выполняются, а также условия из теоремы 2.1 (25)-(27) соблюдаются, то смешанная задача I в пространстве* $V_2^{2,4}$ *не может иметь более одного решения, как было показано в работе* [10].

Эти условия являются важными ограничениями, которые обеспечивают единственность решения для рассматриваемой смешанной задачи I. Они связаны с коэффициентами и параметрами уравнения, которые должны соответствовать определенным ограничениям для гарантированной единственности решения.

Теорема 2.4. *Если следующее условие выполняется*

$$2\beta_0 + \beta_1^2 \leq 0. \quad (31)$$

а также условия из теоремы 2.1 (25)-(27) соблюдаются, то в пространстве $V_2^{2,4}$ *краевая задача II не может иметь более одного решения, как было показано в работе* [10].

Допустим существует действительные числа δ и τ. Пусть

$$p_0(\delta) = p_0 - (2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2)\delta, p_1(\delta) = p_1 - \frac{3\gamma_1\delta}{T},$$

$$\tilde{p}_1(\delta) = \left(\frac{3a_0}{a_1T} - 2\alpha_1\right)\gamma_1 - \frac{3a_0\gamma_1\delta}{a_1T},$$

$$P_\delta(\tau) = p_0(\delta)\tau^2 - p_1(\delta)\tau + \gamma_1,$$

$$\tilde{P}_\delta(\tau) = p_0(\delta)\tau^2 - \tilde{p}_1(\delta)\tau + \gamma_1.$$

Теорема 2.5. *Пусть выполняются условия (25) и (27) а также следующая*

$$a(x) \in C^1(\bar{\Omega}), a(x) \leq 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega}, \quad (27')$$

существуют числа δ_0 *и* τ_0^* *такие, что*

$$\delta_0 \in (0,1], \quad \tau_0^* > 0, \quad P_{\delta_0}(\tau_0^*) \leq 0,\ 2\alpha_1\tau_0^* < \frac{3}{T}; \quad (32)$$

существуют такие числа δ_1 *в интервале* $(0,1]$ *и* τ_1^* *такие, что*

$$\tau_1^* > 0, \quad \tilde{P}_{\delta_1}(\tau_1^*) \leq 0,\ 2\alpha_1\tau_1^* < \frac{3a_0}{\alpha_1T}. \quad (33)$$

то для любой функции $f(x,t)$, *удовлетворяющего одному из следующих условий* а) $f(x,t)$ *принадлежит пространству* $L_2\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$

б) $f(x,t), f_t(x,t)$, *принадлежать пространству* $L_2(Q)$

смешанная задача I в пространстве $V_2^{2,4}$ *имеет решение.* [10]

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия (25), (26), (27'), а также следующая*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_0 \neq 0,\ \ 2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}},\ \ 2\alpha_0 < \gamma_1\bar{\tau}_2,$$

а также из теоремы 2.5 одно из условий а) либо б). Тогда смешанная задача I имеет решение $u(x,t)$, *из пространства* $V_2^{2,4}$. [10]

Теорема 2.7. *Если условия (25)-(28) выполняются, а также существует такое значение* δ_3 *в интервале* $[0,1)$, *что следующее неравенство выполнено*

$$2\delta_3\beta_0 + \beta_1^2 \leq 0. \tag{34}$$

то для любой функции $f(x,t)$, *удовлетворяющего одному из следующих условий*

а) $f(x,t)$ *принадлежит пространству* $L_2\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$

б) $f(x,t), f_t(x,t), f_{tt}$, *принадлежать пространству* $L_2(Q)$ *смешанная задача II в пространстве* $V_2^{2,4}$ *имеет решение* $u(x,t)$ *из пространства* $V_2^{2,4}$. [10]

Нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения с оператором би-Лапласа

$$u_{tt} - \Delta^2 u + c(x,t)u = f(x,t),\ \ (x,t) \in Q, \tag{35}$$

$$u|_S = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_S = 0, \tag{36}$$

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), \tag{37}$$

$$u_t(x,0) = \beta u_t(x,T),\ \ \alpha, \beta \in R. \tag{38}$$

При исследовании нелокальных задач подобного рода часто используются методы продолжения по параметру, априорной оценки и предельный переход. Применение этих методов позволяет исследовать различные аспекты нелокальных задач и получать информацию о свойствах их решений. Для уравнения гиперболического типа метод продолжения по параметру не применим, так как будут потеряна гладкости правой части уравнения.

$$u_{tt} - \Delta^2 u + c(x,t)u - \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t) \in L_2(Q), \tag{39}$$

$$u|_S = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_S = 0, \tag{40}$$

$$u(x,0) = \lambda\alpha u(x,T), \tag{41}$$

$$u_t(x,0) = \lambda\beta u_t(x,T). \tag{42}$$

Теорема 2.8. *Пусть выполняются условия:* $c(x,T) - \lambda^2\alpha^2 c(x,0) \geq 0$, $c_t(x,T) \leq 0$, $f, f_t \in L_2(Q)$. *Тогда в пространстве* $W_2^{2,2}(Q)$ *нелокальная смешанная задача (39)-(42) не может иметь более одного решения.*

Третий раздел посвящён исследованию спектральных задач для неклассических уравнений с дифференциальным оператором шестого порядка.

Предположим, что в ограниченной области Ω с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$ существуют переменных $x_1, \ldots, x_n$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим цилиндр Q, определенной как $\Omega \times (0,T)$. $S = \Gamma \times (0,T)$ представляет собой боковую границу цилиндра Q, $0 < T < +\infty$. Этом цилиндре рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -\frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \ \ x \in \Omega, \ \ t \in (0,T), \tag{43}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Краевая задача $\mathrm{I}_{3,\lambda}$: *Требуется найти решение* $u(x,t)$, *уравнения (43) в области* Q *такое, что*

$$u(x,t)\,\Big|_S = 0 \tag{44}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = 0, \ x \in \Omega, \tag{45}$$

$$u_t(x,T) = u_{tt}(x,T) = 0, \ x \in \Omega, \tag{46}$$

Краевая задача II: *требуется найти в области* Q *такое решение* $u(x,t)$ *уравнения (43), для которой выполняются условия (44), (45) а также следующее*

$$D_t^4 u(x,t)|_{t=T} = D_t^5 u(x,t)|_{t=T} = 0, \ x \in \Omega \tag{47}$$

В этом разделе описываем вычисления собственных значений $\lambda_m^{(1)}$ $(\lambda_m^{(2)})$ спектральной задачи для квазигиперболического уравнения шестого порядка и исследуем разрешимость краевых задач I, II для случаев, когда λ совпадает или не совпадает с $\lambda_m^{(1)}$ $(\lambda_m^{(2)})$.

Мы определяем V_3 как линейное множество функций $v(x,t)$, где $v(x,t)$ принадлежат $L_2(Q)$. Эти функции имеют определенную следующим образом норму:

$$\|v\|_{V_3} = \left(\int\limits_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial^6 v}{\partial t^2} \right)^2 \right] dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Кроме того, внутри этого пространства V_3 функции $v(x,t)$ имеют обобщенные производные по переменной t, не превышающие шестой порядок и по пространственным переменным, не превышающие второй порядок. Ясно, что пространство V_3 обладает свойствами банахова пространства.

Пусть в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть функция $v(x)$, которое справедливо следующее неравенство

$$\int\limits_\Omega v^2(x)dx \le c_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x)dx, \tag{48}$$

где постоянная c_0 определяется лишь областью Ω.

Для функций из пространства V_3 удовлетворяющих условиям (48), имеют место неравенства

$$\int\limits_\Omega v^2(x,t_0)dx \le T^3 \int\limits_0^T \int\limits_\Omega v_{ttt}^2(x,t)dx\,dt, \qquad t_0 \in [0,T], \tag{49}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega v^2(x,t_0)dxdt \le \frac{T^6}{8} \int\limits_0^T \int\limits_\Omega v_{ttt}^2(x,t)dx\,dt. \tag{50}$$

Пусть $w_j(x)$ обозначает собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа, которые удовлетворяют следующему уравнению и граничному условию:

$$\Delta w_j(x) = \mu_j w_j(x), \qquad w_j(x)|_\Gamma = 0.$$

Теорема 3.1 *Пусть* $\lambda > c_1$, $c_1 = min\left\{-\frac{1}{c_0}, -\frac{40}{T^6}\right\}$, c_0 *из (48). Тогда однородная краевая задача* $I_{3,\lambda}$ *имеет в пространстве* V_3 *только нулевое решение. На промежутке* $(-\infty, c_1)$ *существует счетное множество чисел* $\lambda_m^{(1)}$ *таких, что при* $\lambda = \lambda_m^{(1)}$ *однородная краевая задача* $I_{3,\lambda}$ *имеет нетривиальное решение.*

Теперь рассмотрим спектральную задачу II. Исследование задачи II проводится аналогично. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2 *При* $\lambda > c_1$, $c_1 = min\left\{-\frac{1}{c_0}, -\frac{40}{T^6}\right\}$, *однородная краевая задача II в пространстве* V_3 *имеет только нулевое решение. На промежутке* $(-\infty, c_1)$ *не существует счетного множество чисел* $\lambda_m^{(1)}$ *таких, что при* $\lambda = \lambda_m^{(1)}$ *однородная краевая задача II имела нетривиальное решение*.

1 НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В данном разделе для уравнений четвертого порядка квазигиперболического типа с интегральными условиями исследуется нелокальная краевая задача.

Известно, что такие уравнения относятся к уравнениям Соболевского типа.

Исследования свойств корректности краевых задач важны как для приложения в различных прикладных задачах математики и механики.

Но современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, одним из таких классов качественно новых задач являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Нелокальными называют такие задачи, в которых вместо, или вместе с граничным условием ставятся условия, связывающие значения решения (и, возможно, его производных) во внутренних точках области или в точках границы и каких-либо внутренних точках. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями, которые являются естественным обобщением дискретных нелокальных условий. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода условия встречаются, например, при математическом моделировании различных процессов теплопроводности, влагопереноса в капиллярно пористых средах, процессов, происходящих в турбулентной плазме, при изучении задач математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач.

1.1 Нелокальная краевая задача с интегральным условием для квазигиперболических уравнений четвертого порядка

Предположим, что в ограниченной области Ω с гладкой границей Г существует точка $x = (x_1, \dots, x_n)$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим цилиндр Q определенный как $\Omega \times (0, T)$, где переменные (x, t) соответствуют координатам и времени. Здесь T представляет собой конечную высоту цилиндра, а $S = \Gamma \times (0, T)$ представляет собой боковую границу цилиндра Q. Функции $c(x, t)$, $f(x, t)$ и $N(t)$ заданы для $x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T]$, а λ является действительным параметром.

<u>Нелокальная задача I</u>: *в цилиндре Q найти решение $u(x, t)$ для следующего уравнения*

$$u_{tttt} + \Delta u + c(x, t)u = \lambda u + f(x, t) \qquad (1.1.1)$$

*(Δ —*оператор Лапласа, по переменным $x_1, \dots x_n$*) и такую, для которых выполняются следующие условия*

$$u(x,t)\Big|_S = 0 \qquad (1.1.2)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad (1.1.3)$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)dt = 0, \qquad x \in \Omega, \qquad (1.1.4)$$

Цель данного раздела диссертационной работы состоит в исследовании разрешимости нелокальных задач типа I в классах регулярных решений. Здесь под регулярными решениями понимаются решения, для которых все обобщенные производные, входящие в уравнение, существуют и являются функциями, обладающими свойствами С.Л. Соболева.

В рамках исследования будет изучено влияние спектрального параметра λ на единственность решений нелокальной задачи. Это позволит определить, при каких условиях задача имеет единственное решение, а при каких может иметь несколько решений.

Обсудим вначале вопрос о влиянии параметра λ на разрешимость нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$.

Пусть $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательности собственных функций и соответствующих им несобственных чисел задачи

$$\Delta \mathrm{w}(x) = \mu w(x) \in \Omega, \qquad w(x)\Big|_\Gamma = 0$$

причем последовательность $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормирована в пространстве $L_2(\Omega)$. Важно отметить, что функции $w_k(x) \in {W_2}^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W_2}{}^1(\Omega)$ являются базисом в пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь Ω обозначает рассматриваемую область. Числа μ_k, соответствующие этим функциям, являются отрицательными и могут быть упорядочены в монотонно убывающую последовательность (предполагается, что такая упорядоченность была выполнена). Дополнительно, последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет единственную предельную точку, которая равна $-\infty$. Это означает, что значения μ_k стремятся к $-\infty$ по мере увеличения индекса k. Такое свойство последовательности μ_k может быть использовано для дальнейшего анализа исследуемых уравнений и операторов. В результате, базисные функции $w_k(x)$ и отрицательные значения μ_k, с предельной точкой $-\infty$, играют важную роль в анализе и исследовании рассматриваемых математических моделей. Эти свойства обеспечивают удобную основу для разложения функций и проведения аналитических и численных исследований в задачах, связанных с рассмотренными операторами и уравнениями.

Рассмотрим вначале случай $\lambda > \mu_1$.

Определим числа $\gamma_k(\lambda)$ как положительные, и выполняется $\gamma_k^4(\lambda) = \lambda - \mu_k$. Далее, определим функцию $\varphi_1(z)$ при $z \geq 0$:

$$\varphi_1(z) = e^z - e^{-z} - 2\sin z.$$

Теорема 1.1. Пусть функция $N(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$, и пусть для фиксированного числа λ из промежутка $(\mu_1,+\infty)$ выполняется условие

$$\int_0^{\mathrm{T}} N(t)\left[e^{\gamma_k(\lambda)t}-e^{-\gamma_k(\lambda)t}-2\sin\gamma_k(\lambda)t\right]dt \neq 0,\quad k=1,2,\ldots \tag{1.1.5}$$

Тогда нелокальная задача I в случае $c(x,t)\equiv 0$ не может иметь в пространстве $\mathrm{W}_2{}^{2,4}(Q)$ более одного решения.

Доказательство. Допустим в нелокальной задаче I с тождественно нулевой функцией $c(x,t)$ выполняется $f(x,t)\equiv 0$. Решение $u(x,t)$ такой задачи из пространства $W_2^{2,4}(Q)$ представляется рядом Фурье:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)w_k(x),$$

функции же $c_k(t)$ должны быть решениями задачи

$$c_k^{(4)}(t)-\gamma_k^4(\lambda)c_k(t)=0, \tag{1.1.6}$$

$$c_k(0)=c_k'(0)=c_k''(0)=0, \int_0^T N(t)c_k(t)dt=0 \tag{1.1.7}$$

В этой задаче дифференциальное уравнение для функций $c_k(t)$ и первые три условия дают равенства

$$c_k(t)=C_{1,k}\varphi_1(\gamma_k(\lambda)t),\ \ k=1,2,\ldots$$

Используя далее интегральное условие, учитывая условия (1.1.5) и условия $\lambda>\mu_1$ каждая из постоянных $C_{1,k}$ должна равняться нулю. А это и означает, что в случае $f(x,t)\equiv 0$, $c(x,t)\equiv 0$ решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I из пространства $W_2^{2,4}(Q)$ может быть только тождественно нулевой функцией, и далее – что имеет место единственность решений.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $N(t)$ есть непрерывная неотрицательная на отрезке $[0,T]$ функция, не являющаяся тождественно нулевой. Тогда в пространстве $W_2{}^{2,4}(Q)$ при $\lambda\in(\mu_1,+\infty)$ нелокальная задача I в случае $c(x,t)\equiv 0$, не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Для функции $\varphi_1(z)$ выполняется

$$\varphi_1(0)=0,\qquad \varphi_1'(z)=e^z+e^{-z}-2\cos z>0\quad \text{где } z>0.$$

Следовательно, функция $\varphi_1(z)$ строго положительна при $z > 0$. Поскольку функция $N(t)$ непрерывна и неотрицательна, и есть точки, в которых она положительна, то вследствие положительности функции $\varphi_1(\gamma_k(\lambda)t)$ (при $t > 0$) будет выполняться условие (1.1.5). А это и дает единственность решений нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть функция $N(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$, и пусть для фиксированного числа λ из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ и для некоторого набора $k_1, \ldots k_m$ натуральных чисел выполняется*

$$\int_0^T N(t)\varphi_1(\gamma_k(\lambda)t)dt \neq 0,$$

Тогда в пространстве ${W_2}^{2,4}(Q)$ в случае $f(x,t) \equiv 0$, $c(x,t) \equiv 0$ нелокальная задача I имеет m линейно независимых на отрезке $[0,T]$ решений.

Рассмотрим теперь случай $\lambda \in (-\infty, \mu_1]$. Определим числа $\delta_k(\lambda), k = 1,2, \ldots$ и функцию $\psi_1(z)$:

$$\delta_k(\lambda) = |\mu_k - \lambda|^{1/4}, \quad \delta_k > 0,$$

$$\psi_1(z) = (e^z - e^{-z})\cos z - (e^z + e^{-z})\sin z$$

Далее, для чисел λ из промежутка $(-\infty, \lambda_1]$ обозначим через $k_0(\lambda)$ натуральное число такое, что выполняется $\mu_{k_0(\lambda)+1} < \lambda < \mu_{k_0(\lambda)}$.

Теорема 1.1.2. Пусть функция $N(t)$ непрерывна на отрезке $[0,T]$, и пусть для фиксированного числа λ из промежутка $(-\infty, \mu_k)$ выполняются условия

$$\lambda \neq \mu_k,\ k = 1,2, \ldots \tag{1.1.8}$$

$$\int_0^T N(t)\psi_1(\delta_k(\lambda)t)dt \neq 0, \quad k = 1, \ldots, k_0(\lambda), \tag{1.1.9}$$

$$\int_0^T N(t)\varphi_1(\gamma_k(\lambda)t)dt \neq 0, \qquad k \neq k_0(\lambda) + 1, k_0(\lambda) + 2, \ldots, \tag{1.1.10}$$

либо же условия

$$\lambda = \mu_{k_0}, \tag{1.1.11}$$

$$\int_0^{T} N(t)\psi_1(\delta_k(\lambda)t)dt \neq 0, \quad k \neq 1, \dots, k_0 - 1, \tag{1.1.12}$$

$$\int_0^{T} t^3 N(t)dt \neq 0, \tag{1.1.13}$$

а также условие (1.1.10). Тогда нелокальная задача I в случае $c(x,t) \equiv 0$ не может иметь в пространстве ${W_2}^{2,4}(Q)$ более одного решения.

Доказательство. Допустим условие (1.1.10) выполняется. Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи в случае $c(x,t) \equiv 0$ $f(x,t) \equiv 0$ вновь имеет место представление в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) w_k(x),$$

с функциями $c_k(t)$, представляющими собой либо решение краевой задачи (1.1.6), (1.1.7) при $k = k_0(\lambda) + 1,\ k = k_0(\lambda) + 2, \dots,$ либо же решение задачи

$$c_k^{(4)}(t) - \delta_k^4(\lambda) c_k(t) = 0, \tag{1.1.14}$$

$$c_k(0) = c_k'(0) = c_k''(0) = 0, \int_0^{T} N(t)c_k(t)dt = 0 \tag{1.1.15}$$

при $k = 1, \dots, k_0(\lambda)$. Используя условия (1.1.9) и (1.1.10), нетрудно показать, что все функции $c_k(t)$ будут тождественно нулевыми на отрезке $[0, T]$ функциями. А это означает, что имеет место свойство единственности.

Если теперь выполняется условие (1.1.11), то при $k = k_0(\lambda) + 1,\ k = k_0(\lambda) + 2, \dots,$ функции $c_k(t)$ вновь будут определяться как решения задачи (1.1.6), (1.1.7), при $k = 1, \dots, k_0 - 1$ - как решения задачи (1.1.14), (1.1.15), и при $k = k_0$ - как решение задачи

$$c_k^{(4)}(t) = 0$$

$$c_k(0) = c_k'(0) = c_k''(0) = 0, \qquad \int_0^T N(t)c_k(t)dt = 0$$

Используя представления функций $c_k(t)$ и учитывая условия (1.1.10), (1.1.12) и (1.1.13), нетрудно вновь получить, что функции $c_k(t)$ и далее – функция $u(x,t)$, будут тождественно нулевыми.

Теорема доказана.

Замечание. В случае $k_0(\lambda) = 1$ условие (1.1.13) предполагается отсутствующим.

Доказанные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

1. Для любого действительного числа λ существует бесконечно много непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций $N(t)$ таких, что данное число λ будет собственным числом нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$ причем любой наперед заданной кратности.

2. Теоремы 1 и 2 дают условия того, что данное действительное число λ не является собственным числам нелокальной задачи I в случае $c(x,t) \equiv 0$.

Перейдем к обсуждению вопроса о существовании решений нелокальной задачи. Вновь рассмотрим вначале случай $c(x,t) \equiv 0$.

Теорема 1.1.3. Пусть выполняется условия

$$c(x,t) \equiv 0 \quad \text{где } (x,t) \in \bar{Q}, \quad \lambda \in (\mu_1, +\infty); \tag{1.1.16}$$

$$N(t) \in C([0,T]), \; N(t) \geq N_0 t^m, \quad N_0 > 0, \; m \geq 0, \; t \in [0,T]. \tag{1.1.17}$$

Тогда для любой функция $f(x,t) \in L_2(0,T; {W_2}^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ нелокальная задача I в пространстве $W_2^{2,4}(Q)$ имеет решением $u(x,t)$, причем ровно одно.

Доказательство. Рассмотрим смешанную задачу: найти в цилиндре Q решение $v(x,t)$ уравнения

$$v_{tttt} + \Delta v = \lambda v + f(x,t) \tag{1.1.18}$$

и со следующими условиями

$$v(x,0) = v_t(x,0) = v_{tt}(x,0) = v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1.19}$$

Используя технику из работы [10], нетрудно показать что при функции $f(x,t) \in L_2(0,T; {W_2}^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$ и условия $\lambda > \mu_1$ эта задача имеет решение $v(x,t)$ такое, что $v(x,t) \in W_2^{2,4}(Q), \Delta v(x,t) \in L_2\left(0,T; \; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$. Определим функцию $\beta(x)$:

$$\beta(x) = -\int_0^T N(t) v(x,t) dt.$$

Рассмотрим ещё одну вспомогательную смешанную задачу: *найти в цилиндре Q решение $w(x,t)$ для уравнения*

$$w_{tttt} + \Delta w = \lambda w \tag{1.1.20}$$

и со следующими начальными условиями

$$w(x,0) = w_t(x,0) = w_{tt}(x,0) = 0, \int_0^T N(t)w(x,t)dt = \beta(x),\ x \in \Omega \quad (1.1.21)$$

Покажем, используя метод Фурье, что при выполнении (1.1.16) и (1.1.17) эта задача в пространстве $W_2^{2,4}(Q)$ имеет решение.

Функцию $\beta(x)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w_k(x)\,, \beta_k = \int_0^T N(t) \left(\int_\Omega v(x,t) w_k(x)\,dx \right) dt.$$

Функцию $w(x)$ также будем искать в виде ряда Фурье.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) w_k(x),$$

и функции $d_k(t)$ при этом должны быть решениями задачи

$$d_k^{(4)}(t) - \gamma_k^4(\lambda) d_k(t) = 0, t \in (0,T),$$

$$d_k(0) = d_k'(0) = d''(0) = 0, \int_0^T N(t) d_k(t) dt = \beta_k.$$

Имеют место равенства

$$d_k(t) = \frac{\beta_k}{\alpha_k}[e^{\gamma_k(\lambda)t} - e^{-\gamma_k(\lambda)t} - 2\,sin(\,\gamma_k(\lambda)t)],$$

$$\alpha_k = \int_0^{\mathrm{T}} N(t)[e^{\gamma_k(\lambda)t} - e^{-\gamma_k(\lambda)t} - 2\,sin(\,\gamma_k(\lambda)t)]dt, k = 1, \dots .$$

Вследствие условия (1.1.17) все числа α_k будут положительными. Покажем, что существует натуральное число k_0 такое, что при $k > k_0$ выполняется

$$\alpha_k \geq \frac{N_1 e^{\gamma_k(\lambda)T}}{\gamma_k(\lambda)}, \quad N_1 > 0. \quad (1.1.22)$$

Действительно, для чисел α_k имеет место неравенство

$$\alpha_k = N_0 \int_0^{\mathrm{T}} t^m \phi_1(\gamma_k(\lambda)t)dt.$$

Далее, имеем

$$\phi_1(\gamma_k(\lambda)t) = e^{\gamma_k(\lambda)t}[1 - e^{-2\gamma_k(\lambda)t} - 2e^{-\gamma_k(\lambda)t}\, sin(\,\gamma_k(\lambda)t)].$$

Поскольку последовательность $\{\gamma_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно стремится к $+\infty$, то найдется натуральное число k_1 такое, что выполняется

$$\phi_1(\gamma_k(\lambda)t) \geq \frac{1}{2}e^{\gamma_k(\lambda)t} \text{ при } k > k_1.$$

Учитывая эти неравенства, получим, что для чисел α_k при $k > k_1$ выполняется

$$\alpha_k \geq \frac{1}{2}N_1 \int_0^{\mathrm{T}} t^m \mathrm{e}^{\gamma_k(\lambda)t} dt \tag{1.1.23}$$

Для интеграла из правой части имеют место равенства

$$\int_0^{\mathrm{T}} t^m \mathrm{e}^{\gamma_k(\lambda)t} dt \geq \frac{T^{m-1}e^{\gamma_k(\lambda)T}}{\gamma_k}\left[T - \frac{m}{\gamma_k}\right].$$

Вновь вследствие монотонного возрастания последовательности $\{\gamma_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ найдется натуральное число k_2 такое, что при $k > k_2$ имеют место неравенства

$$T - \frac{m}{\gamma_k} \geq \frac{T}{2}. \tag{1.1.24}$$

Из неравенств (1.1.23) и (1.1.24) и следует, что при $k > k_0 = max(\,k_1, k_2)$ выполняется требуемая оценка (1.1.24).

Таким образом, полностью доказана теорема 3 о существование решение нелокальной задачи I.

2 НОВЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

2.1 Введение и постановка новых краевых задач для квазигиперболических уравнений четвертого порядка

Предположим, что в ограниченной области Ω с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим цилиндр Q, определенной как $\Omega \times (0, T)$. Здесь T представляет собой конечную высоту цилиндра, а $S = \Gamma \times (0, T)$ представляет собой боковую границу цилиндра Q. Функции $a^{i,j}(x), i, j = 1, \dots, n,\ a(x), f(x,t)$ заданы для $x \in \bar{\Omega}, t \in [0, T]$. А эллиптический дифференциальный оператор, определяется как:

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x) v_{x_j}\right) + a(x)v$$

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, a_0 > 0, \qquad x \in \bar{\Omega}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Допустим, у нас есть фиксированное натуральное число p, и мы предполагаем, что суммирование производится по индексам, которые повторяются от 1 до n.

В цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$(-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + Au = f(x,t). \qquad (*)$$

Уравнения следующего вида называются квазигиперболического типа

$$(-1)^p D_t^{2p} u + \mathrm{A}u = f(x,t)$$

где $D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}$, обозначает производную порядка k по переменной t, p целое число больше 1.

В случае $p = 1$ это уравнение является уравнением второго порядка гиперболического типа. Однако, если $p > 1$, оно перестает быть уравнением гиперболического типа. В этом случае начально-краевые задачи, которые использовались при постановке задачи для гиперболических уравнении второго порядка, становятся некорректными для новых уравнений [6]. По аналогии уравнениям квазиэллиптическими типа вида

$$(-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - Au = f(x,t),$$

при $p > 1$ уравнение (*), будем называть квазигиперболическими уравнениями. В данной диссертационной работе предметом исследования являются именно такие уравнения при $p = 2$

$$u_{tttt} + Au = f(x,t) \qquad (2.1.1)$$

Впервые В.Н. Врагов [1,2] предложил постановку корректной смешанной задачи для таких уравнений. И.Е. Егоров и В.Е. Федоров получили ряд результатов о разрешимости смешанных задач и свойствах решений уравнений (*), как упоминается в [3]. В работе [4] были предложены новые постановки задач для уравнений (*), отличные от предложенных в [1]–[3], и были получены результаты, подтверждающие их корректность в пространствах Соболева.

Данный раздел диссертационной работы посвящен именно развитию теории, а также изучению некоторых результатов из работы [4] для уравнений (2.1.1).

Пусть α_0, α_1, α_2, β_0 и β_1 есть заданные действительные числа, p – фиксированное натуральное число.

<u>Краевая задача I</u>: *найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$ уравнения* (*) *и удовлетворяющего начальным и граничным условия*

$$u(x,t)|_{S} = 0, \tag{2.1.2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{2.1.3}$$

$$u_{ttt}(x,T) = \alpha_0 u(x,T) + \alpha_1 u_t(x,T) + \alpha_2 u_{tt}(x,T), \;\; x \in \Omega, \tag{2.1.4}$$

<u>Краевая задача II</u>: *найти в цилиндре Q решение $u(x,t)$, уравнения* (2.1.1), *удовлетворяющего условию (2.1.2), а также следующих условии*

$$u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.1.5}$$

$$u_{tt}(x,T) = \beta_0 u(x,T) + \beta_1 u_t(x,T), \qquad x \in \Omega, \tag{2.1.6}$$

Определим пространство $V_2^{2,m}$ (где m — натуральное число) как линейное множество функций $v(x,t) \in L_2(Q)$. Внутри этого пространства $V_2^{2,m}$ функции $v(x,t)$ имеют обобщенные производные по переменной t до второго порядка m включительно и по пространственным переменным до второго порядка включительно. Имеют определенную следующим образом норму:

$$\|v\|_{V_2^{2,m}} = \left(\int_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m} \right)^2 \right] dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ясно, что пространство $V_2^{2,m}$ является банаховым пространства.

Для $w(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} w^2(x)dx \le \gamma_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} w_{x_i}^2(x)dx, \qquad (2.1.7)$$

постоянная γ_0 выбирается в областью Ω минимальным среди возможных - см. [42] гл. II, §2; [43], гл. I, §8.

Если функции $w(x,t)$, и его первая производная по переменной времени тоже в пространстве $L_2(Q)$ а также при $t=0$ обращается в нуль, то следующее неравенство выполняется

$$\int_{\Omega} w^2(x,T)dx \le T \int_{Q} w_t^2 dxdt, \qquad (2.1.8)$$

Неравенства (2.1.7) и (2.1.8) является необходимом при доказательстве теоремы.

Пусть

$$\gamma_1 = a_0\gamma_0^{-1} - \max_{\bar{\Omega}} a(x).$$

Определим квадратичные формы $G_0(\xi), G_1(\xi), G(\rho,\xi)$ из промежутка $(T,+\infty)$ для $\xi = (\xi_0,\xi_1,\xi_2)$, действительного числа ρ и числа T_0

$$G_0(\xi) = (T_0 - T)\xi_0^2 + \left[\frac{3}{T} - 2\alpha_1(T_0 - T)\right]\xi_1^2 + \gamma_1(T_0 - T)\xi_2^2 -$$

$$-2[1 + 2\alpha_2(T_0 - T)]\xi_0\xi_1 - 2\alpha_0(T_0 - T)\xi_1\xi_2,$$

$$G_1(\xi) = \frac{1}{T}\xi_1^2 + \alpha_0\xi_2^2 - \xi_0\xi_1 + \alpha_1\xi_1\xi_2 + \alpha_2\xi_0\xi_2,$$

$$G(\rho,\xi) = G_0(\xi) + \rho G_1(\xi).$$

2.2 Единственность краевых задачи для квазигиперболических уравнений четвертого порядка

Теорема 2.2.1 *Пусть существуют числа* T_0 и ρ_0 *такие, что* $T_0 > T$, $\rho_0 \in (-3,1)$ *и выполняются следующие условия*

$$a^{ij}(x) \in C^1(\Omega), a^{ij}(x) = a^{ji}(x), i,j = 1,\dots,n, x \in \bar{\Omega}; \qquad (2.2.9)$$

$$a_0|\eta|^2 \le a^{ij}(x)\eta_i\eta_j \le a_1|\eta|^2, a_0 > 0, a_1 > 0, x \in \bar{\Omega}, \eta \in \mathbb{R}^n; \qquad (2.2.10)$$

$$a(x) \in C(\bar{\Omega}), a(x) \le 0, \text{при } x \in \bar{\Omega}; \qquad (2.2.11)$$

$$G(\rho_0;\xi) \ge 0 \text{ при } \xi \in \mathbb{R}^3. \qquad (2.2.12)$$

тогда краевая задача I в пространстве $V_2^{2,4}$ не может иметь более одного решения.

Доказательство.

Допустим задача (2.1.1) однородная, то есть $f(x,t) \equiv 0$. Уравнение (2.1.1) умножая на функцию $-2(T_0 - t)u_t(x,t) + \rho_0 u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q,

$$(3+\rho_0)\int_Q u_{tt}^2 dxdt + (1-\rho_0)\int_Q a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dxdt -$$
$$-(1-\rho_0)\int_Q a(x)u^2 dxdt + \int_\Omega \{(T_0 - T)u_{tt}^2(x,T) -$$
$$-2[1+\alpha_2(T_0-T)]u_{tt}(x,T)u_t(x,T) - 2\alpha_1(T_0-T)u_t^2(x,T) -$$
$$-2\alpha_0(T_0-T)u_t(x,T)u(x,T) + \rho_0\alpha_2 u_{tt}(x,T)u(x,T) +$$
$$+\rho_0\alpha_1 u_t(x,T)u(x,T) + \rho_0\alpha_0 u(x,T) - \rho_0 u_t(x,T)u_{tt}(x,T) +$$
$$+(T_0-T)a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T) - (T_0-T)a(x)u^2(x,T)\}dx = 0.$$

Получим оценку от данного равенства применяя условия (2.2.10) и (2.2.11), в том числе (2.1.7) и (2.1.8)

$$(1-\rho_0)\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}^2 dxdt + \int_\Omega F(\rho_0; u_{tt}(x,T)u_t(x,T), u(x,T))dx \le 0.$$

Из этой неравенства и при положительно определенным квадратичным форме $G(\rho_0;\xi) \ge 0$ очевидно получим $u(x,t) \equiv 0$ при $(x,t) \in \bar{Q}$. Тогда в пространстве $V_2^{2,4}$ краевая задача имеет единствиенное решение.

Теорема доказана.

Обсудим, какими могут быть числа α_0, α_1 и α_2, чтобы выполнялось условие (2.2.12). Для некоторых модельных случаев краевой задачи I следующие результаты позволить достаточные условия единственности решений.

Пусть выполняются условия (2.2.9) – (2.2.11).

$$\tilde{G}(\xi) = A_1\xi_0^2 + A_2\xi_1^2 + A_3\xi_2^2 - 2B_1\xi_0\xi_1 - 2B_2\xi_1\xi_2 \ \ (\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3).$$

Пусть выполняется условие

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0. \qquad (2.2.13)$$

После несложных преобразований квадратичных форм, получим

$$\tilde{G}(\xi) = \left(\sqrt{A_1}\xi_0 - \frac{B_1}{\sqrt{A_1}}\xi_1\right)^2 + \left(\sqrt{A_3}\xi_2 - \frac{B_2}{\sqrt{A_3}}\xi_1\right)^2 + \left(A_2 - \frac{B_1^2}{A_1} - \frac{B_2^2}{A_3}\right)^2 \xi_1^2.$$

Если выполняется неравенство

$$A_1A_2A_3 - A_3B_1^2 - A_1B_2^2 \geq 0 \quad (2.2.14)$$

при выполнении условия (2.2.13) форма $\tilde{G}(\xi)$ будет неотрицательной.
Примем

$$p_0 = (2\alpha_1 + \alpha_2^2)\gamma_1 + \alpha_0^2, \quad p_1 = \left(\frac{3}{T} - 2\alpha_1\right)\gamma_1,$$

$$P(\tau) = p_0\tau^2 - p_1\tau + \gamma_1.$$

Давайте определим значения α_0, α_1 и α_2, при которых можно найти положительные числа τ, при которых будет выполняться следующее условие

$$P(\tau) \leq 0,\ \frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0. \quad (2.2.15)$$

Если

$$p_0 < 0 \quad (2.2.16)$$

тогда можно найти неотрицательное число τ^* такое, что по условии τ больше τ^* следует первое неравенство (2.2.15). После того, число α_1 должно быть отрицательным, из условии (2.2.16). То есть при условии $\tau > 0$ неравенство $\frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0$ будет выполняться автоматически.

Теперь случай

$$p_0 = 0, p_1 > 0. \quad (2.2.17)$$

тогда можно найти положительное число τ^{**} такое, что по условию τ больше τ^{**} следует неравенство $P(\tau) \leq 0$. Так как, число α_1 отрицательно из условии (2.2.17), то при число τ больше числа τ^{**} имеет место неравенство $\frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0$
.

Пусть теперь выполняется

$$p_0 > 0.$$

Очевидно, что в данном случае требуется, чтобы значение p_1 было положительным, и квадратное уравнение $P(\tau) = 0$ имело действительные корни. Это условие будет выполнено при выполнении следующего неравенства

$$p_1^2 - 4\gamma_1 p_0 \geq 0 \tag{2.2.18}$$

Пусть

$$\tau_1 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4\gamma_1 p_0}}{2p_0}, \tau_2 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4\gamma_1 p_0}}{2p_0}.$$

Числа $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$, и $P(\tau)$ будет меньшее и равно нулю при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Затем, при $\alpha_1 \leq 0$ неравенство $\frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau > 0$ для таких τ будет выполняться автоматически. При положительном α_1 вместе с неравенством (2.2.18) для параметров α_0, α_1, и α_2 необходимо выполняться неравенство

$$\alpha_1\tau_2 < \frac{3}{2T} \tag{2.2.19}$$

В итоге сформируем теорему 2.2.2.

Теорема 2.2.2 *При выполнении условии (2.2.9) – (2.2.11), и одного из условий а), б) или в)*

$$а) p_0 < 0;$$

$$б) p_0 = 0, p_1 > 0;$$

$$в) p_0 > 0, p_1 > 0, p_1^2 - 4\gamma_1 p_0 \geq 0, \alpha_1\tau_2 < \frac{3}{2T}.$$

утверждается, что в пространстве $V_2^{2,4}$*краевая задача I не может иметь более одного решения*.

Доказательство. Представим, условие (2.2.12) при $\rho_0 = 0$ будет выполнятся в том случае, если будет выполнятся одного из условий а), б) или в).

Пусть

$$A_1 = \tau, A_2 = \frac{3}{T} - 2\alpha_1\tau, A_3 = \gamma_1\tau, B_1 = 1 + \alpha_2\tau, B_2 = \alpha_0\tau.$$

Выполняется следующая неравенство

$$A_1A_2A_3 - A_3B_1^2 - A_1B_2^2 = -\tau P(\tau).$$

Пусть $p_0 < 0$. Тогда в случай τ больше τ^{**} имеет место неравенство (2.2.13) и (2.2.14). Пусть $T_0 = \tau + T$. При фиксированным τ, для такого числа T_0 квадратичная форма будет положительно определена.

Для случаев б) и в) вывод аналогичен приведенным выше, за исключением того, что в следующих случаях значение τ берется

б) из интервала $(\tau^{**}, +\infty)$;
в) из отрезка $[\tau_1, \tau_2]$.
В остальном рассуждения и результаты аналогичны приведенным ранее.
Теорема доказана.

Давайте рассмотрим дополнительный случай, который упрощает анализ условий единственности решений для смешанной задачи I.

В данном случае предположим, что неравенство $2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}$ выполняется, тогда квадратное уравнение

$$\alpha_0^2 T\tau^2 - \gamma_1\tau + 2\alpha_0 = 0$$

имеет неотрицательное корни. Пусть $\bar{\tau}_2$ будет наибольшая корень из квадратного уравнения.

Теорема 2.2.3 *Если условия* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *и* $2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}, 2\alpha_0 < \gamma_1\bar{\tau}_2$ *выполняются, а также условия из теоремы 2.2.1 (2.2.9)-(2.2.11) соблюдаются, то краевая задача I в пространстве* $V_2^{2,4}$ *не может иметь более одного решения*

Доказательство. Допустим $\alpha_0 < 0$. В квадратичном форме $\tilde{G}(\xi)$ положим

$$A_1 = \tau,\ A_2 = \frac{3+\rho_0}{T}, \qquad A_3 = \gamma_1\tau + \rho_0\alpha_0, \qquad B_1 = 1 + \frac{\rho_0}{2}, B_2 = \alpha_0\tau.$$

Теперь примем $\rho_0 = -2$. Имеет место равенство

$$A_1A_2A_3 - A_1B_2^2 = \tau\left[\frac{\gamma_1\tau - 2\alpha_0}{T} - \alpha_0^2\tau^2\right].$$

Таким образом, можно утверждать, что форма $G(-2;\xi)$ будет неотрицательным, если для чисел τ выполняется условие $2\alpha_0 < \gamma_1\tau$, а также если неравенство

$$\alpha_0^2 T\tau^2 - \gamma_1\tau + 2\alpha_0 \le 0$$

имеет положительные решения. Согласно требованиям теоремы, это означает, что для неотрицательных чисел τ, близких к числу $\bar{\tau}_2$ будет выполняться и другое свойство.

В результате предыдущих рассуждений можно сделать вывод, что при $\rho_0 = -2$ все условия, указанные в теореме 2.2.1 будут выполняться для смешанной задачи I при условии выполнения соответствующих условий из теоремы. Это позволяет подчеркнуть, что решение для краевой задачи I единственно.

Теорема доказана.

Теорема 2.2.4 *Если следующее условие выполняется*

$$2\beta_0 + \beta_1^2 \le 0. \qquad (2.2.20)$$

а также условия из теоремы 2.2.1 (2.2.9)-(2.2.11) соблюдаются, то в пространстве $V_2^{2,4}$ *краевая задача II не может иметь более одного решения.*

Доказательство.

Рассмотрим уравнение $u_{tttt} + Au = f(x,t)$. При $f(x,t) = 0$, выполняем следующие действие

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right)\cdot u_{ttt}dxdt = -\int_\Omega \int_0^T [a^{ij}(x)\, u_{x_j}u_{x_i ttt} - a^{ij}(x)u_{x_j}u_{ttt}\vartheta_i]dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \int_0^T [\frac{\partial}{\partial t}\cdot\left(a^{ij}(x)u_{x_j}u_{x_i tt}\right) - a^{ij}(x)u_{x_j t}u_{x_i tt}]dxdt =$$

$$= \int_\Omega [-a^{ij}(x)\, u_{x_j}(x,T)u_{x_i tt}(x,T) +$$

$$+a^{ij}(x)u_{x_j}(x,0)u_{x_i tt}(x,0)]dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(a^{ij}(x)u_{x_j t}u_{x_i t}\right)dxdt =$$

$$= \int_\Omega -a^{ij}(x)\, u_{x_j}(x,T)u_{x_i tt}(x,T) + \frac{1}{2}a^{ij}(x)u_{x_j t}(x,T)u_{x_i t}(x,T) =$$

$$= \int_\Omega [-a^{ij}\,(x)u_{x_j}(x,T)\beta_0 u_{x_i}(x,T) - a^{ij}(x)u_{x_j}(x,T)\beta_1 u_{x_i t}(x,T) +$$

$$+\frac{1}{2}a^{ij}(x)u_{x_j t}(x,T)u_{x_i t}(x,T)]dx$$

$$\int_Q a(x)\, uu_{ttt}dxdt = \int_\Omega \int_0^T [\frac{\partial}{\partial t}[a(x)uu_{tt}] - a(x)u_t u_{tt}]dxdt =$$

$$= \int_\Omega a(x)\, u(x,T)u_{tt}(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(a(x)u_t^2)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega} [a(x)\, u(x,T)u_{tt}(x,T) - \frac{1}{2} a(x)u_t^2(x,T)]dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} a(x)\, [\beta_0 u^2(x,T) + \beta_1 u_t(x,T)u(x,T) - \frac{1}{2} u_t^2(x,T)]dx$$

Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{ttt}^2(x,T)dx + \int\limits_{\Omega} \Big[\frac{1}{2} a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j t}(x,T) -$$

$$-\beta_1 a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j}(x,T) - \beta_0 a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)]dx -$$

$$- \int\limits_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,T) - \beta_1 u_t(x,T)u(x,T) - \beta_0 u^2(x,T)\right] dx = 0.$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$-\beta_1 a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j t}(x,T) \geq$$

$$\geq -|\beta_1|\left[a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j t}(x,T)\right]^{\frac{1}{2}} \left[a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)\right]^{\frac{1}{2}}$$

От предыдущего равенства вытекает неравенства

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{ttt}^2(x,T)dx + \int\limits_{\Omega} \Big\{\frac{1}{2} a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j t}(x,T) -$$

$$-|p_1|\left[a^{ij}(x)u_{x_i t}(x,T)u_{x_j t}(x,T)\right]^{\frac{1}{2}} \left[a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)\right]^{\frac{1}{2}} -$$

$$-\beta_0 a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)\, u_{x_j}(x,T)\Big\} dx -$$

$$-\int_{\Omega} a(x) \left[\frac{1}{2} u_t^2(x,T) - \beta_1 u_t(x,T)u(x,T) - \beta_0 u^2(x,T)\right] dx \leq 0.$$

В данном неравенстве на основании условий теорем 2.2.4 следует что второй и третий интегралы положительны. Значить, при $x \in \bar{\Omega}$, функция $u_{ttt}(x,T)$ тождественно равняется нулю. Умножим уравнение (2.1.1) на функцию $\big((T-t)u_{tt}(x,t)\big)_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Имеет место равенство

$$\frac{3}{2}\int_Q u_{ttt}^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q a^{ij}u_{x_it}u_{x_jt}dxdt - \frac{1}{2}\int_Q au^2 dxdt = 0.$$

Из данного равенства явным образом следует, что функция $u(x,t)$ равна нулю для всех точек (x,t) в замыкании области $\bar{Q}$. Это означает, что краевая задача II в пространстве $V_2^{2,4}$ не может иметь более одного решения. Таким образом, теорема доказана.
Результаты этого подраздела опубликовано в работе [10].

2.3 Существование краевых задачи для квазигиперболических уравнений четвертого порядка

В данном подразделе докажем существование новых краевых задач для уравнения (2.1.1). Теоремы 2.2.2 и 2.2.3. посвящен для единственности краевой задачи I.

Пусть δ и τ есть действительные числа. Пусть

$$p_0(\delta) = p_0 - (2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2)\delta, \qquad p_1(\delta) = p_1 - \frac{3\gamma_1\delta}{T},$$

$$\tilde{p}_1(\delta) = \left(\frac{3a_0}{a_1T} - 2\alpha_1\right)\gamma_1 - \frac{3a_0\gamma_1\delta}{a_1T},$$

$$P_\delta(\tau) = p_0(\delta)\tau^2 - p_1(\delta)\tau + \gamma_1,$$

$$\tilde{P}_\delta(\tau) = p_0(\delta)\tau^2 - \tilde{p}_1(\delta)\tau + \gamma_1.$$

Теорема 2.3.1 *Пусть выполняются условия из теоремы 2.2.1 (2.2.9) и (2.2.10) а также нижеприведённые условия*

$$a(x) \in C^1(\bar{\Omega}),\ a(x) \le 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega}, \tag{2.3.11'}$$

существуют числа δ_0 и τ_0^* такие, что

$$\delta_0 \in (0,1], \quad \tau_0^* > 0, \quad P_{\delta_0}(\tau_0^*) \le 0,\ 2\alpha_1\tau_0^* < \tfrac{3}{T}\ ; \tag{2.3.21}$$

существуют такие числа δ_1 в интервале $(0,1]$ и τ_1^* такие, что

$$\delta_1 \in (0,1], \quad \tau_1^* > 0, \quad \tilde{P}_{\delta_1}(\tau_1^*) \le 0,\ 2\alpha_1\tau_1^* < \frac{3a_0}{\alpha_1 T}. \qquad (2.3.22)$$

то для любой функции $f(x,t)$, *удовлетворяющего одному из следующих условий*

а) $f(x,t)$ *принадлежит пространству* $L_2\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$

б) $f(x,t), f_t(x,t)$, *принадлежать пространству* $L_2(Q)$

смешанная задача I в пространстве $V_2^{2,4}$ *имеет решение.* [10]

Доказательство. Для доказательства теоремы 2.3.1 мы используем метод Галеркина, выбирая специальный базис. Для подробной информации можете посмотреть в работе [41].

Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательность собственных чисел и $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированная полная последовательность собственных функций задачи

$$Aw = \lambda w, \quad w(x)|_{\Gamma} = 0.$$

Из работы [42 - 43] известно о таких последовательностях. Все числа λ_k ниже нуля, что $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = -\infty$ и их можно упорядочить по убыванию (что считается выполненным).

Рассмотрим краевую задачу: найти на интервале $(0,T)$ решение $c_k(t)$ следующего уравнения

$$c_k^{(4)}(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t) \qquad (2.3.23)$$

где правая часть этого равенства определено как

$$f_k(t) = \int\limits_{\Omega} f(x,t) w_k(x) dx.$$

Пусть решения уравнения (2.3.23) удовлетворяет условию

$$c_k(0) = c_k'(0) = c_k''(0) = 0, c_k'''(T) = \alpha_0 c_k(T) + \alpha_1 c_k'(T) + \alpha_2 c_k''(T) \quad (2.3.24)$$

Пусть числа δ_0 и τ_0^* определены условием (2.3.21), и $T_0 = \tau_0^* + T,\ \tilde{\delta}_0 = \delta_0(T_0 - T)$. Умножим уравнение (2.3.23) с нулевой правой частью на функцию $-2(T_0 - t)c_k'(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После интегрирование по частям с использованием условий (2.3.24) получим равенство

$$3\int\limits_0^T c_k''^2(t)dt - \lambda_k \int\limits_0^T c_k^2(t)dt + (T_0 - T)\, c_k''^2(T) - 2\alpha_1(T_0 - T)c_k'^2(T) -$$

$$-2\alpha_0(T_0-T)c_k'(T)c_k(T)-2[1+\alpha_2(T_0-T)]c_k''(T)c_k'(T)-$$

$$-\lambda_k(T_0-T)c_k^2(T)=0.$$

Очевидно, что число λ_k неположительны и формируется монотонно убывающая последовательность. Далее, применяя неравенство (2.1.8) получим

$$-\lambda_k\int_0^T c_k^2(t)dt+(T_0-T)\,c_k''^2(T)+\left[\frac{3}{T}-2\alpha_1(T_0-T)\right]c_k'^2(T)+$$

$$+|\lambda_1|(T_0-T)c_k^2(T)-2[1+\alpha_2(T_0-T)]c_k''(T)c_k'(T)-$$

$$-2\alpha_0(T_0-T)c_k'(T)c_k(T)\le 0.$$

Следует равенство

$$\int_\Omega\left[a^{ij}(x)w_{1x_i}(x)w_{1x_j}(x)-a(x)w_1^2(x)\right]dx=|\lambda_1|.$$

Далее воспользуюсь неравенством Фридрихса и условиями (2.2.10) и (2.3.11’), получим оценку

$$|\lambda_1|\ge\gamma_1.$$

Используя эту оценку, и представление $T_0-T=(1-\delta_0)(T_0-T)+\tilde{\delta}_0$, для функций $c_k(t)$ получим следующее неравенство

$$-\lambda_k\int_0^T c_k^2(t)dt+\delta_1 c_k''(T)+(1-\delta_0)(T_0-T)\,c_k''^2(T)+$$

$$+\left[\frac{3}{T}-2\alpha_1(T_0-T)\right]c_k'^2(T)-2[1+\alpha_2(T_0-T)]c_k''(T)c_k'(T)-$$

$$-2\alpha_0(T_0-T)c_k'(T)c_k(T)+\gamma_1(T_0-T)c_k^2(T)\le 0.$$

Учитывая условия (2.3.21) обнаружим, что все слагаемые кроме первых двух образуют положительную квадратичную форму относительно величин $c_k''(T), c_k'(T), c_k(T)$. Для функций $c_k(t)$ определенных в промежутке $[0,T]$, справедливо следующее неравенство:

$$-\lambda_k \int_0^T c_k^2(t)dt \leq 0.$$

Это неравенство является условием единственности решения для краевой задачи (2.3.23), (2.3.24) в пространстве $W_2^4([0,T])$.

Краевая задача (2.3.23), (2.3.24) является линейным ОДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Решение этой задачи определяется четырьмя постоянными, которые можно найти, решив системы из четырех линейных алгебраических уравнений. Благодаря свойству единственности, эта система имеет только одно решение. Следовательно, функции $c_k(t)$ определены корректно для всех значений t в интервале $[0,T]$ и для всех $k = 1,2,...$, а значит, функции $f_k(t)$ принадлежащие пространству $L_2([0,T])$, также принадлежат пространству $W_2^4([0,T])$.

Для краевой задачи I построим семейство приближенных решений. Мы определим это семейство следующим образом:

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t)w_k(x).$$

Для данного семейства функции $\{u_m(x,t)\}_{\mathrm{m}=1}^{\infty}$, удовлетворяющего условиям а) и б) из теоремы 2.3.1, существуют априорные оценки, которые позволяют выбрать последовательность из этого семейства, сходящуюся к искомому решению краевой задачи I.

Для функций $u_m(x,t)$ для всех $m = 1,2,...$, имеют место равенства

$$\int_{\Omega} (u_{mtttt} + Au_m)w_k dx = \int_{\Omega} fw_k dx, \qquad k = 1,\dots,m. \qquad (2.3.25)$$

Давайте умножим k $-$ое равенство (2.3.23) на функцию $-2(T_0 - t)c_k'(t)$ и проинтегрируем его по отрезку $[0,T]$. Затем мы просуммируем результаты для всех значений k в пределах от 1 до m. Получим следующее равенство:

$$-2\int_{Q} (u_{mtttt} + Au_m)(T_0 - t)u_{mt} dxdt = -2\int_{Q} -f(T_0 - t)u_{mt} dxdt.$$

Теперь, применив интегрирование по частям к левой стороне уравнения и используя краевые условия (2.3.24), мы можем преобразовать данное равенство:

$$3\int_{Q} u_{mtt}^2 dxdt + \int_{Q} a^{ij}(x)u_{mx_i}u_{mx_j} dxdt - \int_{Q} a(x)u_m^2 dxdt +$$

$$+\int_{\Omega}\{(T_0-T)u_{mtt}^2(x,T)-2[1+\alpha_2(T_0-T)]u_{mtt}(x,T)u_{mt}(x,T)-$$

$$-2\alpha_1(T_0-T)u_{mt}^2(x,T)-2\alpha_0(T_0-T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T)+$$

$$+(T_0-T)\,a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T)-(T_0-T)u_m^2(x,T)\}dx=$$

$$=-2\int_{Q}(T_0-t)fu_{mt}dxdt. \qquad (2.3.26)$$

Далее мы можем использовать неравенства (2.1.7) и (2.1.8), представление $T_0-T=(1-\delta_0)(T_0-T)+\widetilde{\delta_0}$, условия (2.2.10), (2.3.11') и (2.3.21) а также применить неравенство Юнга. Это позволить нам получить оценку, следующую из (2.3.26):

$$\int_{\Omega}u_{mtt}^2(x,T)dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{Q}u_{mx_i}^2dxdt\le æ_1\int_{Q}u_{mt}^2\,dxdt+$$

$$+C(c_0,\delta_0,\tau_0,æ_1)\int_{Q}f^2dxdt, \qquad (2.3.27)$$

Здесь $æ_1$ - произвольное положительное число.

Умножим k-ое равенство (2.3.25) на функцию $-2(T_0-t)c_k'(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,\mathrm{T}]$. Затем мы просуммируем результаты для всех значении k, и применим методику интегрирования по частям. Получим следующее равенство:

$$3\int_{Q}u_{mtt}^2\,dxdt+\int_{Q}a^{ij}(x)u_{mx_i}u_{mx_j}\,dxdt-\int_{Q}a(x)u_m^2dxdt=$$

$$=2\int_{\Omega}u_{mtt}(x,T)u_{mt}(x,T)dx-2\int_{Q}(T-t)fu_{mt}dxdt. \qquad (2.3.28)$$

Используя неравенство (2.3.27), и применив неравенства Юнга оцениваем правую часть равенства (2.3.28)

$$\int_{\Omega} u_{mt}^2(x,T)dx \le T\int_{Q} u_{mtt}^2 dxdt,$$

$$\int_{Q} u_{mt}^2 dxdt \le T^2 \int_{Q} u_{mtt}^2\, dxdt$$

из равенства (2.3.28) нетрудно получить следующее неравенство

$$3\int_{Q} u_{mtt}^2 dxdt + \int_{Q} a^{ij} u_{mx_i} u_{mx_j} dxdt - \int_{Q} a(x) u_m^2 dxdt \le$$

$$-æ_2^2 T\int_{Q} u_{mtt}^2 dxdt + \frac{æ_1 T}{æ_2^2}\int_{Q} u_{mtt}^2\, dxdt +$$

$$+æ_3^2\int_{Q} u_{mtt}^2 dxdt + \left(\frac{C(c_0,\delta_0,\tau_0,æ_1\,)}{æ_2^2} + \frac{T^2}{æ_3^2}\right)\int_{Q} f^2 dxdt \qquad (2.3.29)$$

Здесь $æ_2$ и $æ_3$ – произвольные положительные числа. Положим $æ_1 = æ_2^4$. Далее, подбирая числа $æ_2$ и $æ_3$ таким образом, чтобы они были малыми, и фиксируя их значение, мы можем из (2.3.29) вывести первую априорную оценку для $u_m(x,t)$:

$$\int_{Q} \left[u_{mtt}^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{mx_i}^2\right] dxdt + \int_{\Omega} u_{mtt}^2(x,T)dx \le N_1 \int_{Q} f^2 dxdt, \qquad (2.3.30)$$

Здесь N_1 – положительная константа, которая определяется лишь функциями $a^{ij}(x),\ i,j = 1,\dots,n,$ и числами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и T.

Таким образом, мы получаем первую априорную оценку (2.3.30) для функций $u_m(x,t)$. Она связывает различные нормы производных $u_m(x,t)$ с нормой функции $f(x,t)$ в пространстве Q.

Пусть δ_1 и τ_1^* - числа, определенные условием (2.3.22). Мы положим $T_1 = \tau_1^* + T,\ \widetilde{\delta_1} = \delta_1(T_1 - T)$.

Умножим k-ое равенство (2.3.23) на функцию $\lambda_k(T_1 - t)c_k'(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем мы просуммируем результаты для всех значений k и получим равенство:

$$\int_Q (T_1-t)(u_{mttt}+Au_m)Au_{mt}dxdt=\int_Q (T_1-t)fA\,u_{mt}dxdt.$$

Далее, мы можем интегрирование по частям и использовать соотношение

$$Au_m(x,T)=Au_m(x,T)-a(x)u_m(x,T)+a(x)u_m(x,T)$$

Таким образом, после интегрирования по частям и применения указанных соотношений, равенство преобразуется в следующую форму:

$$\frac{3}{2}\int_Q a^{ij}u_{mx_itt}u_{mx_jtt}dx\,dt+\frac{1}{2}\int_Q (Au_m)^2dx\,dt+$$

$$+\frac{T_1-T}{2}\int_\Omega [Au_m(x,T)-a(x)u_m(x,T)]^2dx-$$

$$-(T_1-T)\int_\Omega a(x)a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega \{(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)-$$

$$-2\,[1+\alpha_2(T_1-T)]a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)-$$

$$-2\,\alpha_1(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)-$$

$$-2\,\alpha_0(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_j}(x,T)\}dx=$$

$$=\int_Q (T_1-t)fAu_{mt}dxdt+\frac{3}{2}\int_Q au_{mtt}^2\,dxdt+$$

$$+(T_1-T)\int_\Omega a_{x_i}(x)a^{ij}(x)u_{mx_j}(x,T)u_m(x,T)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)\{(T_1-T)u_{mtt}^2(x,T)-2[1+\alpha_2(T_1-T)]u_{mtt}(x,T)u_{mt}(x,T)-$$

$$-2\alpha_1(T_1-T)u_{mt}^2(x,T)-2\alpha_0(T_1-T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T)-$$

$$-\alpha^2(x)u_m^2(x,T)\}dx. \qquad (2.3.31)$$

Оно связывает различные производные функции u_m с функцией f и оператором A в области Q.
Имеют место равенства

$$\int\limits_{Q} a^{ij}u_{mx_itt}u_{mx_jtt}dxdt \geq \frac{a_0}{a_1 T}\int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_j}(x,T)\,dx, \qquad (2.3.32)$$

$$\int\limits_{\Omega}[Au_m\,(x,T)-a(x)\,u_m(x,T)]^2\,dx \geq$$

$$\geq a_0\gamma_0^{-1}\int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T)dx. \qquad (2.3.33)$$

Предположим, что функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию а) теоремы 2.2.2. Используя неравенства (2.3.32) и (2.3.33), интегрируем по частям в слагаемом с функцией $f(x,t)$, и применим неравенство Юнга. Затем, используя первую априорную оценку для $u_m(x,t)$ (2.3.30), мы получим следствие (2.3.31):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{Q}(Au_m)^2\,dxdt+\frac{\widetilde{\delta_1}(T_1-T)}{2}\int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)\,u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\{\left(1-\widetilde{\delta_1}\right)(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)dx+$$

$$+\left[\frac{3a_0}{a_1T}-2\alpha_1(T_1-T)\right]a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)+$$

$$+\gamma_1(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T)-$$

$$-2[1+\alpha_2(T_1-T)]a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)-$$

$$-2\alpha_0(T_1-T)a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_j}(x,T)\}\leq æ_4\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u^2_{mx_it}\,dxdt+$$

$$+C_1\int\limits_Q\left[f^2+\sum_{i=1}^{n}f^2_{x_i}\right]dxdt; \qquad (2.3.34)$$

здесь $æ_4$ - произвольное положительное число, а число C_1 зависит от параметров $a^{ij}(x), i,j=1,\dots,n \;\; a(x), T, \Omega, æ_4$.

Условие (2.3.22) гарантирует не отрицательность третьего слагаемого в левой части выражения (2.3.34). Следовательно, мы можем получит следующую оценку:

$$\frac{1}{2}\int\limits_Q(Au_m)^2dxdt+\frac{\widetilde{\delta_1}(T_1-T)}{2}\int\limits_\Omega a^{ij}(x)\,u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)dx\leq$$

$$\leq æ_4\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u^2_{mx_it}\,dxdt+C_1\int\limits_Q\left[f^2+\sum_{i=1}^{n}f^2_{x_i}\right]dxdt, \qquad (2.3.35)$$

здесь $æ_4$ - произвольное положительное число, а число C_1 определяется параметрами $a^{ij}(x), i,j=1,\dots,n \;\; a(x), \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, T,\ \Omega, æ_4$.

Умножим k –ое равенство (2.3.23) на функцию $\lambda_k(T-t)c'_k(t)$ и проинтегрировав его по отрезку $[0,T]$, а затем просуммировав, мы получаем следующее равенство:

$$\int\limits_Q(T-t)(u_{mtttt}+Au_m)Au_{mt}dxdt=\int\limits_Q(T-t)fAu_{mt}dxdt. \qquad (2.3.36)$$

Это равенство может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{3}{2}\int\limits_Q a^{ij}(x)\,u_{mx_itt}u_{mx_jtt}dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_Q(Au_m)^2dxdt=$$

$$-\int\limits_{Q}(T-t)a^{ij}f_{x_i}u_{mx_it}\,u_{mx_jt}dxdt+\int\limits_{\Omega}a^{ij}(x)\,u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int\limits_{Q}a(x)u_{mtt}^2\,dxdt-\int\limits_{\Omega}a(x)u_{mtt}(x,T)u_{mt}(x,T)dx. \qquad (2.3.37)$$

Используя неравенство (2.3.35), применяя неравенство Юнга к первым двум слагаемым из равенства (2.3.37), а также учитывая первую априорную оценку для $u_m(x,t)$ (2.3.30) и подбирая достаточно малое число æ$_4$, мы получаем вторую априорную оценку для $u_m(x,t)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}u_{mx_itt}^2\,dxdt+\int\limits_{Q}(Au_m)^2dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{mx_itt}^2\,(x,T)dx\le$$

$$\le N_2\int\limits_{Q}\left[f^2+\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}^2\right]dxdt, \qquad (2.3.38)$$

где число N_2 зависит только от функций $a^{ij}(x),i,j=1,\dots,n,a(x),$ чисел $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ и $T,$ и от области Ω.

Умножив k-ое равенство (2.3.23) на функцию $c_k^{(4)}(t)$ и проинтегрировав по отрезку [0, T], а затем просуммировав результаты, мы получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{Q}(u_{mtttt}+Au_m)u_{mtttt}dxdt=\int\limits_{Q}fu_{mtttt}dxdt\,.$$

Применяя неравенство Юнга, а также первую априорную оценку для $u_m(x,t)$ (2.3.30) и априорную оценку для семейства $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ (2.3.38), мы получаем третью априорную оценку:

$$\int\limits_{Q}u_{mtttt}^2dxdt\le N_3\int\limits_{Q}\left[f^2+\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}^2\right]dxdt, \qquad (2.3.39)$$

где число N_3 определяется только функциями $a^{ij}(x),i,j=1,\dots,n,a(x),$ числами $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ и $T,$ а также областью Ω.

Полученные первая (2.3.30) , вторая (2.3.38) и третья (2.3.39) априорные оценки гарантирует, что функция $u_m(x,t)$ равномерно ограничено в пространстве $V_2^{2,4}$. Используя свойство рефлексивности гильбертова пространства, мы можем выбрать из этого семейства слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть предельная функция этой подпоследовательности обозначается как $u(x,t)$. Функция $u(x,t)$ принадлежит пространству $V_2^{2,4}$ и является решением уравнения (2.1.1). Кроме того, она удовлетворяет краевым условиям (2.1.2) - (2.1.4). Таким образом, функция $u(x,t)$ является искомым решением краевой задачи I.

Пусть теперь выполняется условие б) из теоремы 2.2.2 для функции $f(x,t)$. В равенствах (2.3.31) и (2.3.36) мы интегрирование по частям по временной переменной t в слагаемых с функцией $f(x,t)$. Проведя аналогичные выкладки, которые привели ко второй априорной оценке (2.3.38), получим следующее неравенство для функций $u_m(x,t)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q} u_{mx_itt}^2\,dxdt+\int\limits_{Q}(Au_m)^2dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega} u_{mx_itt}^2(x,T)dx\le$$

$$\le æ_5\int\limits_{\Omega}[Au_m(x,T)]^2dx+C_2\int\limits_{Q}(f^2+f_t^2)dxdt, \qquad (2.3.40)$$

здесь $æ_5$ является произвольным положительным числом, а число C_2 определяется функциями $a^{ij}(x), i,j=1,\dots,n, a(x)$, числами $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$, $æ_5$ и T, областью Ω.

Аналогично, путем умножения k-ого равенства (2.3.25) на функцию $\lambda_k c_k'(t)$, а затем интегрирования по отрезку $[0,T]$ и суммирования, мы получаем равенство:

$$\int\limits_{Q}(u_{mtttt}+Au_m)Au_{mt}dxdt=\int\limits_{Q} fAu_{mt}dxdt.$$

Это равенство может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[Au_m(x,T)]^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} a(x)u_{mtt}^2(x,T)dx=\int\limits_{Q} f_tAu_mdxdt-$$

$$-\int\limits_{\Omega} f(x,T)A\,u_m(x,T)dx +$$

$$+\alpha_0 \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)dx +$$

$$+\alpha_1 \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)dx +$$

$$+\alpha_2 \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{mx_itt}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)dx -$$

$$-\alpha_0 \int\limits_{\Omega} a(x)u_{mt}(x,T)u_m(x,T)dx -$$

$$-\alpha_1 \int\limits_{\Omega} a(x)u_{mt}^2(x,T)dx - \alpha_2 \int\limits_{\Omega} a(x)u_{mtt}(x,T)u_{mt}dx.$$

Выбирая число $æ_5$ достаточно малым и используя неравенства Юнга, а также первую априорную оценку (2.3.30) и (2.3.40), мы можем получить четвертую априорную оценку для функций $u_m(x,t)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} u_{mx_itt}^2 dxdt + \int\limits_{Q} (Au_m)^2 dxdt + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} u_{mx_itt}^2(x,T)dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega} [Au_m(x,T)]^2 dx \le N_4 \int\limits_{Q} (f^2 + f_t^2)dxdt, \qquad (2.3.41)$$

где число N_4 зависит только от функций $a^{ij}(x), i,j = 1,\dots,n, a(x)$, от чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и T, и от области Ω.

Следуя предыдущим действия, можем получить и пятую априорную оценку для функции $u_m(x,t)$:

$$\int\limits_{Q} u_{mttt}^2 dxdt \le N_5 \int\limits_{Q} (f^2 + f_t^2)dxdt \qquad (2.3.42)$$

Первая (2.3.30), четвертая (2.3.41) и пятая (2.3.42) априорные оценки указывают на равномерное ограничение семейство функции $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $V_2^{2,4}$. Благодаря свойству рефлексивности гильбертова пространства, мы можем выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность из этого семейства, чей предел будет представлять искомое решение краевой задачи I. Теорема полностью доказана.
Результаты этого подраздела опубликованы в работе [10].

2.4 Примеры единственности и существования решений условия существования

Для обеспечения выполнения условий теоремы единственности (теоремы 2.2.2) и теоремы существования (теоремы 2.3.1) необходимо выбрать подходящие значения для чисел α_0, α_1 и α_2.

Если условие а) теоремы 2.2.2 выполняется, то для достаточно малых положительных чисел δ будет отрицательным $p_0(\delta)$, и при больших положительных значениях Θ неравенства $P(\Theta) \leq 0, P_\delta(\Theta) \leq 0, \tilde{P}_\delta(\Theta) \leq 0$ будут выполнены. Кроме того, условие, а) означает, что число α_1 не положительно. Однако это автоматически приведет к выполнению третьих неравенств в условиях (2.3.21) и (2.3.22). В итоге мы получаем, что условие а) теоремы 2.2.2, а также условия (2.2.9), (2.2.10) и (2.3.11') обеспечивают существование и единственность регулярных решений для краевой задачи I, при условии, конечно, что функции $f(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3.1.

Если условие

$$p_0 = 0,\ 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 > 0 \tag{2.4.43}$$

выполняется, то заметим, что оно приводит к неположительным α_1 и положительным p_1. Кроме того, для чисел $\delta > 0$, значение $p_0(\delta)$ будет меньше нуля. Таким образом, при больших положительных значениях Θ снова будут выполняться условия (2.3.21) и (2.3.22). В результате, существование и единственность регулярных решений обеспечивает выполнение условий (2.4.43), (2.2.9), (2.2.10) и (2.3.11') для краевой задачи I.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие

$$p_0 = 0,\ 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 = 0 \tag{2.4.44}$$

В этом случае будут справедливы не положительность α_1, положительность p_1 и $\tilde{p}_1$. При этом, для малых положительных δ будет выполняться условие б) из теоремы 2.2.2, а также значения $p_0(\delta)$ и $\tilde{p}_1(\delta)$ будут больше нуля. В свою очередь, положительность этих значении и условие (2.4.44) означают, что для больших положительных Θ будут выполняться неравенства $P(\Theta) \leq 0, P_\delta(\Theta) \leq 0, \tilde{P}_\delta(\Theta) \leq 0$, и как следствие, условия (2.3.21) и (2.3.22) также будут выполнятся. В результате, существование и единственность регулярных решений обеспечивает выполнение условий (2.4.44), (2.2.9), (2.2.10) и (2.3.11') для краевой задачи I.

Рассмотрим случай, когда выполняется условие

$$p_0 = 0,\ 2\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0^2 < 0,\ p_1 > 0 \tag{2.4.45}$$

При условии $\alpha_1 \leq 0$ и $\tilde{p}_1(0) > 0$, а также для малых положительных δ, выполняются неравенства $p_1(\delta) > 0, \tilde{p}_1(\delta) > 0$. Кроме того, неравенство $P(\Theta) \leq 0$ будет выполнено при больших положительных Θ, а неравенства $2\alpha_1\tau < \frac{3}{T}$, $2\alpha_1\tau < \frac{3\alpha_0}{a_1 T}$ будут выполняться для всех положительных чисел τ. При малых положительных δ, уравнение $P_\delta(\Theta) = 0$ имеет положительный корень Θ_2, а уравнение $\tilde{P}_\delta(\Theta) = 0$ также имеет положительный корень $\tilde{\tau}_2$. Требуемые неравенства $P_\delta(\Theta) \leq 0, \tilde{P}_\delta(\Theta) \leq 0$ выполняются для значений τ из интервала (0, τ_2) или $(0, \tilde{\tau}_2)$. Следовательно, при выполнении условия (2.4.45), вместе с условиями (2.2.9), (2.2.10) и (2.3.11’) краевая задача I имеет единственное регулярное решение.

Оставшиеся случаи, где p_0 больше нуля, анализируются схожим образом, но требуют более сложных выкладок. Важно отметить, что будут рассмотрены конкретные ситуации, в которых не выполняются условия единственности и существования регулярных решений для краевой задачи I. Эти случаи будут подробно изучены в последующих разделах.

Теорема 2.4.1 утверждает, что при выполнении условий (2.2.9), (2.2.10), (2.3.11’), и дополнительного условия, которое может быть либо условием а), либо б) из теоремы 2.3.1, краевая задача I в пространстве $V_2^{2,4}$ будет иметь решение $u(x,t)$. Дополнительное условие включает следующие ограничения:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_0 \neq 0,\ 2\alpha_0 < \left(\frac{\gamma_1^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}},\ 2\alpha_0 < \gamma_1\overline{\Theta}_2,$$

Эти условия гарантируют существование решения задачи, которое принадлежит пространству $V_2^{2,4}$. Это означает, что решение $u(x,t)$ удовлетворяет определенным требованиям регулярности и ограниченности в указанном пространстве.

Доказательство будет аналогичным предыдущему, и мы также будем использовать метод Галеркина с выбором специального базиса. В процессе доказательства будут проведены аналогичные рассуждения и выкладки, как и в теореме 2.3.1. Необходимые априорные оценки будут получены после анализа соответствующих равенств.

В процессе доказательства теоремы будет использован метод Галеркина с выбором специального базиса, аналогичный предыдущему доказательству. Проведя анализ следующих равенств, мы получим необходимые априорные оценки:

$$-\int_Q (u_{mtttt} + Au_m)[(T_0 - t)u_{mt} - 2u_m]dxdt =$$

$$= -\int_Q f[(T_0 - t)u_{mt} - 2u_m]dxdt,$$

$$-\int_Q (u_{mtttt} + Au_m)[(T_0 - t)Au_{mt} + Au_m]dxdt =$$

$$= -\int_Q f[(T_0 - t)Au_{mt} + Au_m]dxdt.$$

Все рассуждения и выкладки будут аналогичны предыдущему случаю, описанному при доказательстве теоремы 2.3.1.

Первое равенств можно преобразовать к следующему виду:

$$\int_Q u_{mtt}^2 dxdt + 3\int_Q a^{ij} u_{mx_i} u_{mx_j} dxdt - 3\int_Q a\, u_m^2 dxdt +$$

$$+\int_\Omega \{(T_0 - T)u_{mtt}^2(x,T) - 2\alpha_0(T_0 - T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T) -$$

$$-2\alpha_0 u_m^2(x,T) + (T_0 - T)a^{ij}u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T) - (T_0 - T)au_m^2(x,T)\}dx =$$

$$= -2\int_Q f[(T_0 - t)\, u_{mt} + u_m]dxdt.$$

Согласно условию теоремы число T_0 можно выбрать так, чтобы следующие неравенства выполнялись:

$$T_0 > T, 2\alpha_0 < \gamma_1(T_0 - T)$$

Затем, используя неравенство (2.1.7), (2.2.10), $(T_0 - T) > 0$, перейдем от последнего равенства к следующему неравенству:

$$\int\limits_Q u_{mtt}^2 dxdt + 3\alpha_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{mx_i}^2 dxdt + 2(T_0 - T) \int\limits_\Omega u_{mtt}^2(x,T)dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega \{[\gamma_1(T_0 - T) - 2\alpha_0] u_{mt}^2(x,T) - 2\alpha_0(T_0 - T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T) +$$

$$+ \frac{1}{T} u_{mt}^2(x,T)\}dx \le \frac{1}{T} \int\limits_\Omega u_{mt}^2(x,T)\, dx + 2 \int\limits_Q |f||(T_0 - T)u_{mt} + u_m| dxdt.$$

Поскольку условий теоремы выполнены, следующая квадратичная форма положительно определена:

$$\frac{1}{T} u_{mt}^2(x,T) - 2\alpha_0(T_0 - T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T) + \gamma_1(T_0 - T)u_m^2(x,T)$$

Из этого следует, что выполняется следующее неравенство, что число $\mu_0 > 0$ существует:

$$\frac{1}{T} u_{mt}^2(x,T) - 2\alpha_0(T_0 - T)u_{mt}(x,T)u_m(x,T) + \gamma_1(T_0 - T)u_m^2(x,T) \ge$$

$$\ge \mu_0[\, u_{mt}^2(x,T) + u_m^2(x,T)].$$

Предположим, что мы выбрали число μ_1 таким образом, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$0 < \mu_1 < \min(1, \mu_0 T).$$

С использованием этого и неравенство (2.1.8), мы можем получить следующую

$$\left(\frac{1 - \mu_1}{T} + \mu_0 - \frac{1}{T}\right) \int\limits_\Omega u_{mt}^2(x,T)dx + \mu_0 \int\limits_\Omega u_m^2(x,T)dx +$$

$$+2(T_0 - T) \int\limits_\Omega u_{mtt}^2\,(x,T)dx + \mu_1 \int\limits_Q u_{mtt}^2 dxdt + 3a_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{mx_i}^2 dxdt \le$$

$$\le 2 \int\limits_Q |f||(T_0 - T)u_{mt} + u_m|\, dxdt.$$

Применяя неравенство Юнга, получим априорную оценку для $u_m(x,t)$

$$\int\limits_Q \left[u_{mtt}^2+\sum_{i=1}^n u_{mx_i}^2\right]dxdt+\int\limits_\Omega [\,u_{mtt}^2(x,T)+u_{mt}^2(x,T)]\,dx\le R_1\int\limits_Q f^2dxdt$$

где постоянная R_1 зависит только от функции $a^{ij}(x), ij=1\dots,n, a(x)$, чисел α_0, T, и от области Ω.

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{mx_itt}^2dxdt+\int\limits_Q (Au_m)^2dxdt+\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \left[\,u_{mx_itt}^2(x,T)+u_{mx_it}^2(x,T)\right]dx\le$$

$$\le R_2\int\limits_Q \left[f^2+\sum_{i=1}^n f_{x_i}^2\right]dxdt,$$

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_Q u_{mx_{itt}}^2dxdt+\int\limits_Q (Au_m)^2dxdt+\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega \left[\,u_{mx_itt}^2(x,T)+u_{mx_it}^2(x,T)\right]dx\le$$

$$\le R_3\int\limits_Q [f^2+f_t^2]dxdt,$$

в зависимости от выполнения условии а) или б) на функцию *f,* постоянные R_2 и R_3 могут быть определены функциями $a^{ij}(x), ij=1\dots,n,$ числами α_0, *T,* и областью Ω.

Очевидно, что функции $u_{mtttt}(x,t)$ удовлетворяют оценке в $L_2(Q)$. Применяя стандартную процедуру выбора сходящейся подпоследовательности и доказательства выполнения уравнения (2.1.1) для предельной функции, мы можем достичь нужного результата.

Ясно, что при $\alpha_0<0$ выполняются необходимые условия из теорем 2.2.3 и 2.4.1.

Следующая теорема является теоремой разрешимости II краевой задачи.

Теорема 2.4.2 *Если условия* (2.2.9)- (2.2.11), *выполняются, а также существует такое значение* δ_3 *в интервале* $[0,1)$, *что следующее неравенство выполнено*

$$2\delta_3\beta_0+\beta_1^2\le 0. \tag{2.4.46}$$

то для любой функции $f(x,t)$, *удовлетворяющего одному из следующих условий* *а) $f(x,t)$ принадлежит пространству $L_2\left(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right)$*

б) $f(x,t), f_t(x,t), f_{tt}$, *принадлежать пространству* $L_2(Q)$

II краевая задача в пространстве $V_2^{2,4}$ имеет решение $u(x,t)$. [10]

Доказательство будет основано на применении метода Галеркина с выбором специального базиса.

Семейство приближенных решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ II краевой задачи построим с помощью функций $w_k(x)$:

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x);$$

где функции $c_k(t)$ являются решениями соответствующих краевых задач для ОДУ с заданными начальными условиями:

$$c_k^{(4)}(t) + \lambda_k c_k(t) = f_k(t),$$

$$c_k'(0) = c_k''(0) = c_k'''(0) = 0,\ c_k''(T) = \beta_0 c_k(T) + \beta_1 c_k'(T).$$

Единственность решения этой краевой задачи доказывается также, как и доказательство теоремы 2.2.3. Из единственности решении следует разрешимость в пространстве $W_2^4([0,\mathrm{T}])$. Равномерная ограниченность семейства функции $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $V_2^{2,4}$ будет достаточно для доказательства существования решений краевой задачи II.

Давайте умножим k-ое равенство (2.3.23) на функцию $c_k'''(t)$ и проинтегрируем его по отрезку [0, T]. Затем мы просуммируем результаты для всех значений k в пределах от 1 до m. Получим следующее равенство:

$$\int_Q (u_{mttt} + Au_m) u_{mtttt} dxdt = \int_Q f u_{mttt}\, dxdt.$$

Теперь, применив интегрирование по частям, мы можем преобразовать в данное равенство:

$$\frac{1}{2}\dot{\int_\Omega} u_{mttt}^2\,(x,T)dx + \frac{1-\delta_3}{2}\dot{\int_\Omega} a^{ij}(x) u_{mx_it}(x,T) u_{mx_jt}(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}[\delta_3 a^{ij}(x)u_{mx_it}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)-2\beta_0 a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_j}(x,T)-$$

$$-2\beta_1 a^{ij}(x)u_{mx_i}(x,T)u_{mx_jt}(x,T)]dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}a(x)[u_{mt}^2(x,T)-2\beta_0 u_m^2(x,T)-2\beta_1 u_{mt}(x,T)u_m(x,T)]dx=$$

$$=\int\limits_{Q}fu_{mttt}dxdt.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, Юнга, и условия (2.4.46) из этого равенства можно вывести следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega}\left[u_{mttt}^2(x,T)+\sum_{i=1}^{n}u_{mx_it}^2(x,T)\right]dx\le æ_6\int\limits_{Q}u_{mttt}^2dxdt+C_3\int\limits_{Q}f^2dxdt \quad (2.4.47)$$

где число $æ_6$ - произвольное положительное, а значение C_3 определяется функциями $a^{ij}(x), i,j=1,\dots,n$, и числами δ_3 и $æ_6$.

Давайте, теперь умножим k-ое равенство (2.2.23) на функцию $((T-t)c_k''(t))'$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем мы просуммируем результаты и применив методику интегрирования по частям. Получим следующее равенство:

$$\frac{3}{2}\int\limits_{Q}u_{mttt}^2dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{Q}a^{ij}u_{mx_it}u_{mx_jt}dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q}au_{mt}^2dxdt=$$

$$=\int_{\Omega}u_{mttt}(x,T)u_{mtt}(x,T)\,dx+\int_{Q}f\left[\frac{\partial}{\partial t}(T-t)u_{mtt}\right]dxdt.$$

Воспользуемся неравенством (2.4.47) выбрав значением $æ_6$ достаточно малым, и применим неравенства Юнга на это равенства. В результате к семейству приближенных решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ краевой задачи II получаем первую априорную оценку:

$$\int\limits_{Q}\left[u_{mttt}^2+\sum_{i=1}^{n}u_{mx_it}^2\right]dxdt+\int\limits_{\Omega}\left[u_{mttt}^2(x,T)+\sum_{i=1}^{n}u_{mx_it}^2(x,T)\right]dx\le$$

$$\leq N_6 \int\limits_Q f^2\, dxdt \tag{2.4.48}$$

Здесь N_6 - постоянная, которая определяется только функциями $a^{ij}(x), i,j = 1, \dots, n, a(x)$, числами δ_3, T.

Давайте, теперь умножим k-ое равенство (2.2.23) на функцию $-\lambda_k\, c_k'''(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем мы просуммируем результаты для всех значений k и применим методику интегрирования по частям. В результате получим следующее равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{mx_ittt}(x,T)u_{mx_jttt}(x,T)dx - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(x)u_{mttt}^2(x,T)dx +$$

$$+\frac{1-\delta_\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega [Au_{mt}(x,T)]^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \{\delta_3[Au_{mt}(x,T)]^2 -$$

$$-2\beta_1 Au_m(x,T)Au_{mt}(x,T) - 2\beta_0[Au_m(x,T)]^2\}dx = \int\limits_\Omega fAu_{mttt}\, dx\, dt. \tag{2.4.49}$$

Согласно условию а) из теоремы 2.4.2, верно, следующее равенство

$$\int\limits_Q fAu_{mttt}\, dx\, dt = -\int\limits_Q a^{ij} f_{x_i} u_{mx_jttt} dx\, dt + \int\limits_Q fau_{mttt}\, dx\, dt.$$

Применяя во внимание условие (2.4.46), первую априорную оценку (2.4.48), и последнее равенство, из (2.4.49) можно получит следующую оценку:

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{mx_ittt}^2\,(x,T)dx + \int\limits_\Omega [Au_{mt}(x,T)]^2 dx \leq æ_7 \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{mx_ittt}^2 dxdt +$$

$$+C_4 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2\right] dxdt, \tag{2.4.50}$$

где число $æ_7$ - произвольное положительное, значение C_7 зависит только от функции $a^{ij}(x), i,j = 1, \dots, n, a(x)$, и чисел δ_3, T и $æ_7$.

Давайте теперь умножим k-ое равенство (2.3.23) на функцию $-\lambda_k((T-t)c_k''(t))'$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем просуммируем результаты для всех значений k и применим методику интегрирования по частям. В результате получим следующее равенство

$$\frac{3}{2}\int\limits_Q a^{ij}u_{mx_ittt}u_{mx_jttt}dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_Q (Au_{mt})^2dxdt-\frac{3}{2}\int\limits_Q au_{mttt}^2dxdt=$$

$$=\int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{mx_ittt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)\,dx-\int\limits_Q a(x)u_{mttt}(x,T)u_{mtt}(x,T)\,dx+$$

$$+\int\limits_Q (T-t)a^{ij}f_{x_i}u_{mx_jttt}\,dx\,dt-\int\limits_Q a^{ij}f_{x_i}u_{mx_jtt}\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_Q (T-t)fau_{m_{ttt}}\,dx\,dt+\int\limits_Q fau_{mtt}\,dx\,dt.$$

Воспользуемся неравенством (2.4.50) выбрав значением $æ_7$ достаточно малым, и применим неравенства Юнга на это равенства. В результате к семейству приближенных решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ краевой задачи II получим вторую априорную оценку

$$\int\limits_Q\left[(Au_{mt})^2+\sum_{i=1}^{n}u_{m_{x_ittt}}^2\right]dx\,dt+\int\limits_\Omega [Au_{mt}(x,T)]^2\,dx+$$

$$+\sum\nolimits_{i=1}^{n}\int_\Omega u_{mx_ittt}^2(x,T)\,dx\leq N_7\int_Q\left[f^2+\sum\nolimits_{i=1}^{n}f_{x_i}^2\right]dx\,dt;\quad (2.4.51)$$

где N_7 - постоянная, которая определяется только функциями $a^{ij}(x),i,j=1,\dots,n,a(x)$, числами δ_3, T.

Давайте, продолжая, умножим k-ое равенство (2.3.23) на функцию $\lambda_k c_k(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем просуммируем результаты для всех значений *k,* тогда получим следующее равенство:

$$\int\limits_Q (Au_m)^2\,dx\,dt=-\int\limits_Q a^{ij}u_{mx_it}u_{mx_jttt}\,dx\,dt+\int\limits_Q au_{m_t}u_{mttt}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{m_{x_ittt}}(x,T)u_{mx_j}(x,T)\,dx-\int\limits_Q a(x)u_m(x,T)U_{mttt}(x,T)\,dx+$$

$$+\int_Q f A u_m \, dx\, dt.$$

Воспользовавшись неравенством (2.4.51) из этого равенство можем получить оценку следующего вида:

$$\int_Q (Au_m)^2\, dx\, dt \leq æ_8 \left[\int_\Omega u_m^2(x,T)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u_{mx_i}^2(x,T)\, dx\right] +$$

$$+C_5 \int_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2\right] dxdt, \qquad (2.4.52)$$

где число $æ_8$ - произвольное положительное, значение C_5 зависит от функции $a^{ij}(x), i,j = 1,\dots,n, a(x),$ и чисел δ_3, T, $æ_8$.

Используя постоянную K_0 зависающего только от значения T [39, 40], следующие неравенства корректны:

$$\int_\Omega u_m^2(x,T)dx \leq K_0 \int_Q (u_m^2 + u_{mt}^2) dxdt,$$

$$\int_\Omega u_{mx_i}^2(x,T)dx \leq K_0 \int_Q \left(u_{mx_i}^2 + u_{mx_it}^2\right) dxdt,$$

Мы можем ограничить сверху правые части этих неравенств, используя второе основное неравенство для эллиптических операторов [39]. В следствие получаем оценки для левых частей неравенств

$$\int_\Omega u_m^2(x,T)dx \leq K_1 \left[\int_Q (Au_m)^2 dxdt + \int_Q (Au_{mt})^2 dxdt\right], \qquad (2.4.53)$$

$$\int_\Omega u_{mx_i}^2(x,T)dx \leq K_1 \left[\int_Q (Au_m)^2 dxdt + \int_Q (Au_{mt})^2 dxdt\right], \qquad (2.4.54)$$

где K_1 - число зависит только от функции $a^{ij}(x), i,j = 1,\dots,n, a(x)$, чисел T, и от области Ω.

Воспользуемся неравенствами (2.4.50) - (2.4.54) выбрав значением $æ_8$ достаточно малым, и применим неравенства Юнга. В результате к семейству приближенных решений $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ краевой задачи II получим третью априорную оценку следующего вида:

$$\int\limits_Q (Au_m)^2 dxdt \leq N_8 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2 \right] dxdt; \qquad (2.4.55)$$

где N_8 - постоянная, которая зависит от функции $a^{ij}(x), i,j = 1, \dots, n, a(x)$, чисел $\delta_{\ 3}$, T, и области Ω.

Следуя методом получения предыдущих оценок (2.4.48), (2.4.52) и (2.4.55), можем получить и следующую априорную оценку:

$$\int\limits_Q u_{mtttt}^2 dxdt \leq N_9 \int\limits_Q \left[f^2 + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^2 \right] dxdt \qquad (2.4.56)$$

где N_9 - постоянная, которая зависит от функции $a^{ij}(x), i,j = 1, \dots, n, a(x)$, чисел $\delta_{\ 3}$, T, и области Ω.

Полученные априорные оценки (2.4.48), (2.4.52), (2.4.55) и (2.4.56) указывают на равномерное ограничение семейство функции $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $V_2^{2,4}$. Благодаря свойству рефлексивности гильбертова пространства, мы можем выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ из этого семейства, чей предел будет представлять искомое решение краевой задачи II.

Согласно условию б) из теоремы 2.4.2, верно, следующее равенство:

$$\int\limits_Q f\, Au_{mttt} dxdt = \int\limits_Q f_{tt}\, Au_{mt} dxdt - \int\limits_Q f_t(x,T)\, Au_{mt}(x,T) dx +$$

$$+\beta_0 \int\limits_\Omega f(x,T) Au_m(x,T) dx + \beta_1 \int\limits_\Omega f(x,T) Au_{mt}(x,T) dx.$$

Принимая во внимание этот и равенство (2.4.49) можно получит следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega u_{mx_ittt}^2(x,T)\, dx + \int [Au_{mt}(x,T)]^2 dx \leq\ æ_9 \int\limits_Q (Au_{mt})^2 dxdt +$$

$$+C_6 \int\limits_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dxdt, \qquad (2.4.57)$$

где число $æ_9$ - произвольное положительное, значение C_6 зависит только от функции $a^{ij}(x), i,j = 1,\dots,n, a(x)$, и чисел β_0, β_1, δ_3, T и $æ_9$.

Давайте, умножим k-ое равенство (2.3.23) на функцию $-\lambda_k((T-t)c_k''(t))'$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Затем просуммируем результаты для всех значений k, тогда получим следующее равенство:

$$\frac{3}{2}\int\limits_Q a^{ij}\, u_{mx_ittt}u_{mx_jttt}dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q (Au_{mt})^2 dxdt - \frac{3}{2}\int\limits_Q au_{mttt}^2 dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{mx_ittt}(x,T)u_{mx_jtt}(x,T)dx - \int\limits_Q a(x)u_{mttt}(x,T)u_{mtt}(x,T)dx +$$

$$+ \int\limits_Q (T-t)\, f_{tt}Au_{mt}dx\, dt - \int\limits_Q f_t\, Au_{mt}dx\, dt$$

Учитывая неравенство (2.4.57) из этого равенство получаем априорную оценку следующего вида:

$$\int\limits_Q \left[(Au_{mt})^2 + \sum_{i=1}^n u_{mx_ittt}^2\right] dx\, dt + \int\limits_\Omega [Au_{mt}(x,T)]^2 dx +$$

$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{mx_ittt}^2(x,T)dx \le N_9 \int\limits_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx\, dt \qquad (2.4.58)$$

где N_9 - постоянная, которая зависит от функции $a^{ij}(x), i,j = 1,\dots,n, a(x)$, чисел δ_3, T, и области Ω.

Принимая во внимание оценки (2.4.48), (2.4.58) и используя второе основное неравенство для эллиптических операторов можем получить следующие оценки

$$\int\limits_Q (Au_m)^2\, dx\, dt \le N_9 \int\limits_Q [f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2] dx\, dt, \qquad (2.4.59)$$

$$\int\limits_Q u_{mttttt}^2 dx\, dt \le N_{10} \int\limits_Q [\, f^2 + f_t^2 + f_{tt}^2]\, dx\, dt \qquad (2.4.60)$$

Полученные априорные оценки (2.4.48), (2.4.58) - (2.4.60) указывают на равномерное ограничение семейство функции $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $V_2^{2,4}$. Благодаря свойству рефлексивности гильбертова пространства, мы можем выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ из этого семейства, чей предел будет представлять искомое решение краевой задачи II.

Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 2.2.4 для решения $u(x,T)$ краевой задачи I будут выполнены включения $u(x,T) \in W_2^2(\Omega)$, включения $u_t(x,T) \in W_2^1(\Omega)$, $u_{tt}(x,T) \in W_2^1(\Omega)$.*

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 для решения $u(x,T)$ краевой задачи II будут выполняться включения $u_t(x,T) \in W_2^2(\Omega), u_{tt}(x,T) \in W_2^1(\Omega), u_{ttt}(x,T) \in W_2^1(\Omega)$.*

Доказательство. Указанные включения дают оценки (2.3.37) или (2.3.39) после предельного перехода.

Замечание 1. Из полученных оценок следует, что граничные значения $u(x,T), u_t(x,T), u_{tt}(x,T)$ обладают дополнительной гладкостью, которая не может быть обеспечена принадлежностью решения $u(x,t)$ пространству $V_2^{2,4}$.. Например, из оценки (2.3.41) следует, что после предельного перехода на соответствующей подпоследовательности, $u(x,t)$ принадлежит пространству W_2^2.

Замечание 2. Краевые задачи I и II в случаях $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ или $\beta_0 = \beta_1 = 0$ были исследованы в работе [4]. Условия разрешимости, представленные в этой работе для функции $f(x,t)$, соответствуют условиям б) из теоремы 2.3.1. Однако условия а) из теоремы 2.3.1 являются новыми и не были рассмотрены в данной работе.

2.5 Примеры неединственности решений

Невыполнение условий теорем 2.2.1-2.2.4 приведет к проблеме неединственности решении для краевых задач I и II. Для демонстрации этого приведем примеры.

Пример 1. При условии

$$\alpha_0 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \neq 0. \tag{2.5.61}$$

Однородное уравнение (2.3.23) с условиями (2.3.24) имеет решение $c_k(t)$:

$$c_k(t) = C_1 e^{\mu_k t} + C_2 e^{-\mu_k t} + C_3 \cos \mu_k t + C_4 \sin \mu_k t;$$

$$c_k'(t) = \mu_k C_1 e^{\mu_k t} - \mu_k C_2 e^{-\mu_k t} - \mu_k C_3 sin\mu_k t + \mu_k C_4 cos\mu_k t$$

$$c_k''(t) = \mu_k^2 C_1 e^{\mu_k t} + \mu_k^2 C_2 e^{-\mu_k t} - \mu_k^2 C_3 cos\mu_k t - \mu_k^2 C_4 sin\mu_k t$$

$$c_k'''(t) = \mu_k^3 C_1 e^{\mu_k t} + \mu_k^3 C_2 e^{-\mu_k t} - \mu_k^3 C_3 cos\mu_k t - \mu_k^3 C_4 sin\mu_k t$$

где число μ_k положительное, которая определена как $\lambda_k = -\mu_k^4$. Исползуя условиями (2.3.24) получаем следующую алгебраическую систему для чисел $C_1 - C_4$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ (\mu_k^2 - \alpha_1)C_1 e^{\mu_k T} - (\mu_k^2 - \alpha_1)C_2 e^{-\mu_k T} + \\ +(\mu_k^2 + \alpha_1)C_3 \sin \mu_k T - (\mu_k^2 + \alpha_1)C_4 \cos \mu_k T = 0 \end{cases}$$

Из системы видно, что:

$$C_3 = 0, C_2 = -C_1, C_4 = -2C_1,$$

$$C_1[(\mu_k^2 - \alpha_1)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \alpha_1)e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^2 + \alpha_1)\cos \mu_k T] = 0.$$

Из последнего равенства следует, что если значение сумм в скобке равна нулю, то значение C_1 будет произвольным. Из этого следует, что задача (2.3.23), (2.3.24) будет иметь нетривиальное решение.

Из следующего равенства

$$(\mu_k^2 - \alpha_1)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \alpha_1)e^{-\mu_k T} + 2\,(\mu_k^2 + \alpha_1)\cos \mu_k T = 0$$

можно вычислить число α_1:

$$\alpha_1 = \alpha_{1,k} = \frac{\mu_k^2(e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} + 2\cos \mu_k T)}{e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2\cos \mu_k T}, k = 1,2, \dots$$

В итоге, при выполнении условии (2.5.61), и значение α_1 совпадает с одним из значении $\alpha_{1,k}$, то краевая задача (2.3.23), (2.3.24) будет иметь нетривиальное решение $c_k(t)$. Ранее, мы искали решение однородной задачи I в следующем виде:

$$u(x,t) = c_k(t)w_k(x).$$

Заметим, что поскольку $e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2\cos \mu_k T \neq 0$, то для всех натуральных чисел k, $\alpha_{1,k}$ могут быть корректно определены.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим краевую задачу (2.3.23), (2.3.24) со следующими условиями

$$\alpha_0 \neq 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \qquad (2.5.62)$$

Воспользовавшись условиями (2.3.24) получаем следующую алгебраическую систему для чисел $C_1 - C_4$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ (\mu_k^3 - \alpha_0) C_1 e^{\mu_k T} - (\mu_k^3 + \alpha_0) C_2 e^{-\mu_k T} + \\ +(\mu_k^3 - \alpha_0) C_3 \sin \mu_k T - (\mu_k^3 + \alpha_0) C_4 \cos \mu_k T = 0 \end{cases}$$

Из системы видно, что:

$$\mathrm{C}_3 = 0, \mathrm{C}_2 = -\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_4 = -2\mathrm{C}_1,$$

$$\mathrm{C}_1 [(\mu_k^3 - \alpha_0) e^{\mu_k T} + (\mu_k^3 + \alpha_0) e^{-\mu_k T} + 2(\mu_k^3 + \alpha_0) \cos \mu_k T] = 0$$

Из последнего равенства следует, что, если значение сумм в скобке равна нулю, то C_1 будет произвольным. Для этого должно выполнятся следующее условие:

$$\alpha_0 = \alpha_{0,k} = \frac{\mu_k^3 (e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} + 2 \cos \mu_k T)}{e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} - 2 \sin \mu_k T}, k = 1,2, \dots$$

Как и в предыдущем примере выполнение условии (2.5.62), означает что однородная краевая задача I будет иметь нетривиальное решение $u(x,t)$.

Пример 3. Рассмотрим однородную краевую задачу II с условиями:

$$\beta_0 = 0, \ \beta_1 \neq 0. \tag{2.5.63}$$

Воспользовавшись условиями (2.3.24) получаем следующую алгебраическую систему для чисел $C_1 - C_4$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ C_1 - C_2 - C_4 = 0 \\ (\mu_k - \beta_1) C_1 e^{\mu_k T} + (\mu_k + \beta_1) C_2 e^{-\mu_k T} - \\ -(\mu_k \cos \mu_k T - \beta_1 \sin \mu_k T) C_3 - (\mu_k \sin \mu_k T + \beta_1 \cos \mu_k T) C_4 = 0. \end{cases}$$

Из системы видно, что:

$$C_4 = 0, C_2 = C_1, \qquad C_3 = 2C_1,$$

$$(\mu_k - \beta_1) C_1 \mathrm{e}^{\mu_k T} + (\mu_k + \beta_1) C_2 \mathrm{e}^{-\mu_k T} - 2(\mu_k \cos \mu_k T - \beta_1 \sin \mu_k T) C_1 = 0.$$

Отсюда получаем, что C_1 будет произвольным, если выполняется следующее равенство:

$$\beta_1 = \beta_{1,k} = \frac{\mu_k[e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2\cos\mu_k T]}{e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} + 2\sin\mu_k T}, \quad k = 1,2,...,$$

Тем самым, при выполнении условия $\beta_0 = 0, \mathrm{A}_1 \neq 0$ и при совпадании числа β_1 с одним из чисел $\beta_{1,k}$ однородная краевая задача II будет иметь нетривиальное решение.

Заметим, что поскольку $\mu_k > 0$, и $e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} + 2\sin\mu_k T \neq 0$, и тем самым все числа $\beta_{1,k}$ корректно определены.

<u>*Пример 4.*</u> Рассмотрим краевую задачу II со следующими условиями

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 \neq 0.$$

Так же как в вышеприведенных примерах получаем систему для решения $\mathrm{c}_\text{к}(t)$

$$c_k(t) = c_1 e^{\mu_k t} + C_2 e^{-\mu_k t} + C_3\, cos\,\mu_K t + C_4\, sin\,\mu_K t;$$

Воспользовавшись условиями (2.3.24) получаем следующую алгебраическую систему для чисел $C_1 - C_4$

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_4 = 0 \\ C_1 - C_2 - C_4 = 0 \\ (\mu_k^2 - \beta_0)C_1 e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \beta_0)C_2 e^{-\mu_k T} - \\ -(\mu_k^2 + \beta_0)C_3\cos\mu_k T - (\mu_k + \beta_0)C_4\sin\mu_k T = 0. \end{cases}$$

Из системы видно, что:

$$\mathrm{C}_4 = 0, \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_3 = 2\mathrm{C}_1,$$

$$C_1[(\mu_k^2 - \beta_0)e^{\mu_k T} + (\mu_k^2 - \beta_0)e^{-\mu_k T} - 2(\mu_k^2 + \beta_0)\cos\mu_k T] = 0,$$

$$\beta_0 = \beta_{0,k} = \frac{\mu_k^2\,[e^{\mu_k T} + e^{-\mu_k T} - 2\cos\mu_k T]}{e^{\mu_k T} - e^{-\mu_k T} + 2\cos\mu_k T}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Для таких чисел $\beta_{0,k}$ в случае $\beta_0 = 0$ однородная краевая задача II нетривиальные решения.

Тем самым, при выполнении условия (2.5.63) и при совпадении числа β_1 с одним из чисел $\beta_{1,k}$ краевая задача II будет иметь нетривиальные решения.

<u>Параметры граничных условий как собственные значения.</u>

Найденные в предыдущем разделе числа $\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \beta_{0,k}, \beta_{1,k}$ и соответствующие функции $c_k(t)w_k(x)$ можно трактовать как решения задач на собственные значения со спектральным параметром в граничных данных – именно, задач с условиями

$$u_{ttt}(x,T) = \lambda u(x,T),$$

$$u_{ttt}(x,T) = \lambda u_t(x,T)$$

и т.д. Проведем некоторый анализ найденных решений соответствующих спектральных задач.

Задачи на собственные значения со спектральным параметром в граничных условиях для обыкновенных дифференциальных уравнений изучаются давно и представляются достаточно хорошо изученными – см., например, работы [15, 11] и имеющуюся в них библиографию. Для уравнений с частными производными подобные задачи также изучались [12-15], но для квазигиперболических уравнений (2.2.1) ранее таких исследований не было.

2.6 Нелокальная краевая задача для гиперболического уравнения с оператором би-Лапласа

Пусть Ω - ограниченная область пространства R^n с гладкой границей Γ, Q – цилиндр $\Omega \times (0,T), 0 < t < T < +\infty, S = \Gamma \times (0,T)$ - боковая граница Q, на ней рассматривается следующее гиперболическое уравнение с оператором би-Лапласа

$$u_{tt} + \Delta^2 u + c(x,t)u = f(x,t), \ (x,t) \in Q, \qquad (2.6.1)$$

где $c(x,t), f(x,t)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Для уравнения (2.6.1) исследуем нелокальную по времени краевую задачу

$$u|_S = 0, \qquad (2.6.2)$$

$$u(x,0) = \alpha u(x,T), \qquad (2.6.3)$$

$$u_t(x,0) = \beta u_t(x,T), \alpha, \beta \in R. \qquad (2.6.4)$$

При исследовании нелокальных задач подобного рода часто используются методы продолжения по параметру, метод априорной оценки и предельный переход.

Метод продолжения по параметру позволяет изучать свойства решений при изменении параметра задачи. Этот метод позволяет получать информацию о поведении решений при различных значениях параметра и исследовать их зависимость от этого параметра.

Метод априорной оценки позволяет установить ограничения на решение задачи еще до его получения. С помощью этого метода можно получить верхние и нижние оценки для решения, что является важным инструментом для доказательства единственности, ограниченности и других свойств решений.

Предельный переход используется для изучения поведения решений при изменении некоторых параметров или при переходе к предельным случаям. Это позволяет получить информацию о предельных свойствах решений, таких как сходимость, устойчивость и другие характеристики.

Применение этих методов позволяет исследовать различные аспекты нелокальных задач и получать информацию о свойствах их решений. Поэтому для того чтобы исследовать нелокальных задач подобного рода дополнительно рассмотрим регуляризованную задачу для самой задачи (2.6.1) – (2.6.4); к этому задачу исследуем полностью вопросы регуляризованную задачу.

Определим функциональное пространство, в котором будут изучаться свойства единственности и существования решения краевой задачи (2.6.1)-(2.6.4). Именно, определим пространство $W_2^{2,2}(Q)$ как множество функций из пространства $L_2(Q)$, имеющих принадлежащие этому же пространству обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до второго порядка включительно. Зададим в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ норму

$$\|v\|_{W_2^{2.2}(Q)} = \left(\int_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_i x_j}^2 + (v_{tt})^2\right] dxdt\right)^{1/2}$$

очевидно, что пространство $W_2^{2,2}(Q)$ с этой нормой будет банаховым пространством.

Рассмотрим следующую регуляризованную задачу, для того чтобы применить метод продолжения по параметру

$$u_{tt} + \Delta^2 u + c(x,t)u - \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t) \in L_2(Q) \tag{2.6.5}$$

$$u|_S = 0 \tag{2.6.6}$$

$$u(x,0) = \lambda\alpha u(x,T), \tag{2.6.7}$$

$$u_t(x,0) = \lambda\beta u_t(x,T). \tag{2.6.8}$$

Для регуляризованной задачи (2.6.5)-(2.6.8) мы получим оценки в соответствующих пространствах. С этой целью уравнение (2.6.5) умножим на u_t и интегрируем по Q, тогда получим

$$\int_Q u_{tt}u_t dxdt - \int_Q \Delta u u_t dxdt + \int_Q cuu_t\, dxdt - \varepsilon\int_Q \Delta u_t\, u_t dxdt = \int_Q fu_t dxdt\,;$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(u_t^2)dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega [u_t^2(0,T) - u_t^2(x,0)]dx = \frac{(1-\lambda^2\beta^2)}{2}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx\,;$$

Здесь учеты краевое условие (2.6.7) и $|\beta| < 1$, такое что $\frac{1-\lambda^2\beta^2}{2} > 0$.

$$I_2 = -\int_Q \Delta u u_t = \sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}u_{x_it}dxdt = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(u_{x_i}^2)dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left[u_{x_i}^2(x,T) - u_{x_i}^2(x,0)\right]dx = \frac{1-\lambda^2\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}^2(x,T)dx\,;$$

$$I_3 = \int_Q cuu_t dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial t}(cu^2)dxdt - \frac{1}{2}\int_Q c_t u^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega [c(x,T)u^2(x,T) - c(x,0)u^2(x,0)]dx - \frac{1}{2}\int_Q c_t u^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega [c(x,T) - \lambda^2\alpha^2 c(x,0)]u^2(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_Q c_t u^2 dx\,dt;$$

$$I_4 = -\varepsilon\int_Q \Delta u_t\, u_t dx = -\,\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_ix_it}\, u_t\, dxdt = \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q {u_{x_it}}^2 dxdt\,;$$

$$\frac{1-\lambda^2\beta^2}{2}\int_\Omega u_t^2(x,T)dx + \frac{1-\lambda^2\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega [c(x,T) - \lambda^2\alpha^2 c(x,0)]u^2(x,T)dx + \frac{1}{2}\int_Q \Delta u_t u_t dxdt +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_it}^2\, dxdt = \int_Q f u_t dxdt;$$

Мы потребуем, чтобы выполнялись условия

$$c(x,T) - \lambda^2\alpha^2 c(x,0) \geq 0\ \ ,\ c_t(x,T) \leq 0\,.$$

При выполнений условии $\vartheta|_S = 0$ имеет место теорема вложения, т.е. неравенство Фридрихса [20]:

$$\int_{\Omega} \vartheta(x,T)dx \le m_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} {\vartheta_{x_i}}^2(x,T)dx\,.$$

Мы его применим для функции $\vartheta = u_t$.

$$I_f = -\int_{Q} f u_t dxdt \le \frac{\delta^2}{2} \int_{Q} u_t^2 dxdt +$$

$$+\frac{1}{2\delta^2}\int_{Q} f^2 dxdt \le \frac{\delta^2 m_0}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_{Q} u_{x_i t}^2 dx\,dt + \frac{1}{2\delta^2}\int_{Q} f^2 dxdt.$$

Выберем

$$\frac{\delta^2 m_0}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда имеем

$$\frac{1-\beta^2}{2}\int_{\Omega} u_t^2(x,T)dx + \frac{1-\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} {u_{x_i}}^2(x,T)dx + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{Q} {u_{x_i t}}^2 dxdt \le$$

$$\le \frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q} f^2 dxdt; \tag{2.6.11}$$

В начале мы должны получить равномерную оценку по λ при фиксированном ε. Уравнение (2.6.5) умножим на u_{tt} и интегрируем по Q, тогда получим

$$-\int_{Q} u_{tt}\Delta u_t dxdt + \int_{Q} \Delta u\,\Delta u_t dxdt - \int_{Q} c\,u\,\Delta u_t dxdt + \varepsilon\int_{Q} {\Delta u_t}^2 dxdt =$$

$$-\int_{Q} f\,\Delta u_t dxdt.$$

Тогда имеем

$$\frac{1-\lambda^2\beta^2}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}{}^2(x,T)dx + \frac{1-\lambda^2\alpha^2}{2}\int_{\Omega}[\Delta u(x,T)]^2 dx + \varepsilon\int_{Q}(\Delta u_t)^2 dxdt =$$

$$= -\int_Q f\Delta u_t dxdt + \int_Q cu\Delta u_t dxdt\,;$$

Оценивая правую часть и учитывая $C_0 = \max_Q |c|$ имеем

$$\frac{1-\lambda^2\beta^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega {u_{x_i t}}^2(x,T)dx + \frac{1-\lambda^2\alpha^2}{2}\int_\Omega [\Delta u(x,T)]^2 dx +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q (\Delta u_t)^2 dxdt \le \frac{1}{\varepsilon}\int_Q f^2 + \frac{{c_0}^2}{\varepsilon}\int_Q u^2 dxdt = I_f. \; (2.6.10)$$

Применив формулу Ньютона-Лейбница:

$$u(t) = \int_0^t u_\tau(x,\tau)d\tau + u(x,0)$$

используя краевое условие (2.6.7) получим

$$u(x,T) = \frac{1}{1-\lambda\alpha}\int_0^T u_t(x,t)dt.$$

Используя неравенство $|(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)|$ получим

$$u^2(x,t) \le 2\left(\int_0^t u_t(x,t)dt\right)^2 + 2\alpha_1\left(\int_0^T u_t(x,t)dt\right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\int_0^t u_\tau^2\, d\tau\right)\left(\int_0^t d\tau\right) + 2\alpha_1\left(\int_0^T u_t^2\, dt\right)\left(\int_0^T dt\right) \le (2T + 2\alpha_1 T)\int_0^T u_t^2 dt;$$

Интегрируем по Q:

$$\int_Q u^2\,(x,t)dxdt \le 2(1+\alpha_1)T^2\int_Q u_t^2 dxdt; \qquad (2.6.11)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \left(\frac{\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\right)^2.$$

Это и есть требуемое неравенство. Обозначим через $k_0 = 2(1+\alpha_1)T^2$. Далее продолжая неравенство (2.6.11) имеем:

$$I_f \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q f^2 dxdt + \frac{C_0^2 k_0}{\varepsilon}\int\limits_Q u_t^2 dxdt \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q f^2 + \frac{C_0^2 k_0 m_0}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_i t}^2 dxdt;$$

Используя неравенство (2.6.9) имеем

$$I_f \leq \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_Q f^2 dxdt + \frac{C_0^2 k_0 m_0}{2\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_Q f^2 dxdt = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{C_0^2 k_0 m_0}{2\varepsilon^2}\right)\int\limits_Q f^2 dxdt\,;$$

Представление Ньютона-Лейбница с использованием (2.6.7) дает:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t u_\tau(x,\tau)d\tau + \frac{\lambda\alpha}{1-\lambda\alpha}\int\limits_0^T u_t(x,t)dt;$$

Таким образом, мы имеем

$$I_1 + I_2 + I_3 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{C_0^2 k_0 m_0}{2\varepsilon^3}\right)\int\limits_Q f^2 dxdt; \qquad (2.6.12)$$

Если в (11) предположить $u = \Delta u$, то получим:

$$\int\limits_Q (\Delta u)^2 dxdt \leq k_0 \int\limits_Q (\Delta u_t)^2 dxdt \leq \frac{2k_0}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{C_0^2 k_0 m_0}{2\varepsilon^3}\right)\int\limits_Q f^2 dxdt; \quad (2.6.13)$$

Осталось получить оценку для первой слагаемой, т.е. для u_{tt}. Для этого воспользуемся следующим известным неравенством:

$$|(a_1 + \cdots + a_m)^2 \leq m(a_1^2 + \cdots + a_m^2)|$$

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt = \int\limits_Q (\Delta u - cu + \varepsilon\Delta u_t + f)^2 dxdt \leq$$

$$\le (4\int\limits_Q (\Delta u)^2 + 4C_0^2\int\limits_Q u^2 + 4\varepsilon\int\limits_Q (\Delta u)^2 + 4\int\limits_Q f^2)dxdt.$$

Для всех слагаемых правой части последнего неравенства получены оценки при фиксированных ε, т.е.

$$\int\limits_Q u_{tt}^2 dxdt \le N(\varepsilon)\int\limits_Q f^2 dxdt. \tag{2.6.14}$$

Далее пременим метод продолжения по параметру при фиксированном ε.

Теперь стираем λ, т.е. рассмотрим краевую задачу при $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} u(x,0) = \alpha u(x,T), \\ u_t(x,0) = \beta u_t(x,T). \end{cases}$$

Получение первой априорной оценки равномерной по ε :

$$\frac{1-\beta^2}{2}\int_\Omega u_t^2(x,T)\,dx + \frac{1-\alpha^2}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega u_{xi}^2(x,T)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega [c(x,T) - a^2 c(x,0)]\,u^2(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_\Omega c_t u^2 dxdt + \varepsilon\sum_{i=1}^n\int_Q u_{x_i t}^2 dxdt =$$

$$= \int_Q f u_t dxdt \le \frac{\delta^2}{2}\int_Q u_t^2 dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int_Q f dxdt. \tag{2.6.15}$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\frac{1-\beta^2}{2}\int_\Omega u_t^2(x,T)\,dx \le \frac{\delta^2}{2}\int_Q u_t^2 dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int_Q f^2 dxdt. \tag{2.6.16}$$

$(2.6.5)\times(A-t)u_t$, где A - некоторое положительное число, $A > T$. Например можно взять$A = 2T$, тогда $A - t > A - T = T$>0;

$$\int_Q (A-t)u_{tt}u_t dxdt - \int_Q (A-t)\Delta u u_t dxdt +$$

$$+\int_Q (A-t)cuu_t dxdt - \varepsilon\int_Q (A-t)\Delta u_t u_t dxdt = \int_Q (A-t)f u_t dxdt;$$

Предположим, что выполнено условие $\frac{\partial}{\partial t}[(A-t)c(x,t)] \le 0$, тогда имеем

$$\frac{A-T}{2}\int_{\Omega} u_t^2\,(x,T)dx + \frac{1}{2}\int_Q u_t^2 dxdt + \frac{A-T}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} u_{x_i}^2\,(x,T)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}^2 dxdt + \frac{A-T}{2}\int_{\Omega} c\,(x,T)u^2(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_Q \big((A-T)c\big)_t u^2 dxdt +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q (A-t)\,u_{x_it}^2 dxdt = \int\limits_Q f(A-t)u_t dxdt + + \frac{A}{2}\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,0)\quad dx +$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} u_{x_i}^2\,(x,0)dx + \frac{A}{2}\int\limits_{\Omega} c(x,0)u^2(x,0)dx \qquad (2.6.17)$$

Воспользуемся краевыми условиями (2.6.7), (2.6.8) и (2.6.16) имеем

$$\int_{\Omega} u_t^2\,(x,T)dx \le \frac{\delta^2}{1-\beta^2}\int_Q u_t^2 dxdt + \frac{1}{\delta^2(1-\beta^2)}\int_Q f^2 dxdt.$$

В результате получим

$$\sum_i I_i \le K_1\delta^2\int_Q u_t^2 dxdt + \frac{K_2}{\delta^2}\int_Q f^2\,dxdt$$

где K_1, K_2- независимой от ε.
Выберем, в частности, $K_1\delta^2 = \frac{1}{4}$, $\delta^2 = \frac{1}{4K_1}$. Тогда получим

$$\frac{1}{4}\int_Q u_t^2\,dxdt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dxdt + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_it}^2\,dxdt \le 4K_1K_2\int_Q f^2 dxdt.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\int_Q u_t^2\,dxdt \le 16K_1K_2\int_Q f^2 dxdt,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}^2\,dxdt \leq 8K_1K_2\int_Q f^2dxdt,$$

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_it}^2\,dxdt \leq 4K_1K_2\int_Q f^2dxdt.$$

Сложив все слагаемые, получим

$$\int_Q u_t^2\,dxdt + \sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_i}^2\,dxdt + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_Q u_{x_it}^2\,dxdt \leq K_0\int_Q f^2dxdt,$$

где K_0- независит от ε. Что и требовалось доказать.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.6.1. Пусть выполняются условия: $c(x,T)-\lambda^2\alpha^2c(x,0)\geq 0$, $c_t(x,T)\leq 0,\ f,f_t\in L_2(Q)$. Тогда краевая задача (2.6.1)-(2.6.4) не может иметь в пространстве $W_2^{2,2}(Q)$ более одного решения.

3 СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

3.1 Спектральные задачи для неклассических дифференциальных уравнений шестого порядка

Предположим, что в ограниченной области Ω с гладкой компактной границей $\Gamma = \partial\Omega$ существуют переменных $x_1, \dots, x_n$ из пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим цилиндр Q, определенной как $\Omega \times (0, T)$. $S = \Gamma \times (0, T)$ представляет собой боковую границу цилиндра Q, $0 < T < +\infty$. Этом цилиндре рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu \equiv -\frac{\partial^6 u}{\partial t^6} + \Delta u - \lambda u = f(x,t), \;\; x \in \Omega, \;\; t \in (0,T), \tag{3.1.1}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Краевая задача I: Требуется найти решение $u(x,t)$, уравнения (3.1.1) в области Q такое, что

$$u(x,t)\,\Big|_S = 0 \tag{3.1.2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,0) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{3.1.3}$$

$$u_t(x,T) = u_{tt}(x,T) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{3.1.4}$$

Краевая задача II: Требуется найти в области Q такое решение $u(x,t)$ уравнения (3.1.1), для которой выполняются условия (3.1.2), (3.1.3) а также следующие

$$u_t(x,T) = u_{tt}(x,T) = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{3.1.4}$$

$$D_t^4 u(x,t)|_{t=T} = D_t^5 u(x,t)|_{t=T} = 0, \;\; x \in \Omega \tag{3.1.5}$$

В этом разделе описываем вычисления собственных значений $\lambda_m^{(1)}$ $(\lambda_m^{(2)})$ спектральной задачи для квазигиперболического уравнения шестого порядка и исследуем разрешимость краевых задач I, II для случаев, когда λ совпадает или не совпадает с $\lambda_m^{(1)}$ $(\lambda_m^{(2)})$.

Обозначим через V_3 —линейное множество функций $v(x,t)$, принадлежащих пространству $L_2(Q)$ и имеющих принадлежащие этому же пространству обобщенные производные по пространственным переменным до второго порядка включительно и по переменной t до порядка 6 включительно, с нормой

$$\|v\|_{V_3} = \left(\int_Q \left[v^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial^6 v}{\partial t^2} \right)^2 \right] dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V_3 является банаховым пространством.

Пусть в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ есть функция $v(x)$, которое справедливо следующее неравенство

$$\int_\Omega v^2(x)dx \le c_0 \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x)dx, \qquad (3.1.6)$$

где постоянная c_0 определяется лишь областью Ω.

Для функций из пространства V_3 удовлетворяющих условиям (3.1.3), имеют место неравенства

$$\int_\Omega v^2(x,t_0)dx \le T^3 \int_0^T \int_\Omega v_{ttt}^2(x,t)dx\,dt, \qquad t_0 \in [0,T], \qquad (3.1.7)$$

$$\int_0^T \int_\Omega v^2(x,t_0)dxdt \le \frac{T^6}{8} \int_0^T \int_\Omega v_{ttt}^2(x,t)dx\,dt. \qquad (3.1.8)$$

Обозначим через $w_j(x)$ −собственные функций задачи Дирихле для оператора Лапласа, соответствующие собственным числам μ_j:

$$\Delta w_j(x) = \mu_j w_j(x), \qquad w_j(x)|_\Gamma = 0.$$

Теорема 3.1.1. Пусть $\lambda > c_1$, $c_1 = \min\left\{-\frac{1}{c_0}, -\frac{40}{T^6}\right\}$, c_0 из (3.1.6). Тогда однородная краевая задача I имеет в пространстве V_3 только нулевое решение. На промежутке $(-\infty, c_1)$ существует счетное множество чисел $\lambda_m^{(1)}$ таких, что при $\lambda = \lambda_m^{(1)}$ однородная краевая задача I имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Сначала мы докажем единственность решение задачи $I_{3,\lambda}$. Пусть $A > T$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^T \int_\Omega (A-t)Lu \;\cdot u_t dx\,dt = 0.$$

Интегрируя по частям и используя условия (3.1.2), (3.1.3) получим

$$\frac{A-T}{2}\int\limits_{\Omega}[u_{ttt}^2(x,T)+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,T)]dx+\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2dx\,dt=-\frac{\lambda(A-T)}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(x,T)dx-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u^2=I \qquad (3.1\ 9)$$

При $\lambda\geq 0$, из этого равенства следует, что $u(x,t)\equiv 0$.
Рассмотрим теперь случай, когда λ −отрицательные числа. С одной стороны, как следствие неравенств (6) и (7) имеем следующую оценку

$$|I|=\left|-\frac{\lambda(A-T)}{2}\int\limits_{\Omega}u^2(x,T)dx-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u^2dx\,dt\right|\leq$$

$$\leq\frac{|\lambda|(A-T)}{2}T^3\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dxdt+\frac{|\lambda|}{2}c_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2dx\,dt. \qquad (3.1.10)$$

С другой стороны, как следствие неравенств (7) и (8), получим

$$I\leq\frac{|\lambda|(A-T)}{2}T^3\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dxdt+\frac{|\lambda|T^6}{2\cdot 2^3}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dx\,dt.$$

Если $c_1=-\frac{1}{c_0}$, то оценивая правую часть (3.1.9) с помощью, получим

$$\frac{A-T}{2}\int\limits_{\Omega}[u_{ttt}^2(x,T)+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,T)]dx+$$

$$+\frac{5-|\lambda|(A-T)T^3}{2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dxdt+\frac{1-|\lambda|c_0}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2dx\,dt\leq 0. \qquad (3.1.11)$$

Поскольку выполняется неравенство $|\lambda|c_0<1$, и от того что можно выбрать число А настолько близким к числу T, чтобы имело место неравенство

$$5-|\lambda|(A-T)T^3>0,$$

При фиксированным λ. Это возможно. Тогда из (11) следует, что $u(x,t)\equiv 0$.

В случае $c_1=-\frac{40}{T^6}$, мы имеем

$$\frac{A-T}{2}\int\limits_{\Omega}[u_{ttt}^2(x,T)+\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,T)]dx+$$

$$+\frac{40-8|\lambda|(A-T)T^3-|\lambda|T^6}{2\cdot 2^3}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}u_{ttt}^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2dx\,dt\le 0. \qquad (3.1.12)$$

Поскольку $40-|\lambda|T^6>0$, то вновь выбирая близким к T, мы можем добиться выполнения неравенства

$$40-8|\lambda|(A-T)T^3-|\lambda|T^6>0.$$

Тогда, из (3.1.12) вновь получим $u(x,t)\equiv 0$.

Далее покажем, что краевая задача $I_{3,\lambda}$ имеет счетное число собственных значений. Пусть $\omega_j(x)$ –собственная функция задача Дирихле для оператора Лапласа, соответствующая собственному числу μ_j:

$$\Delta w_j(x)=\mu_j w_j(x), \quad w_j(x)|_{\Gamma}=0.$$

Решение уравнения (3.1.1) ищем в виде $u(x,t)=\varphi(t)\omega_j(x)$. Тогда функция $\varphi(t)$ должна быть решением уравнения

$$-D_t^6\varphi(t)+[\mu_j-\lambda]\varphi(t)=0, \qquad (3.1.13)$$

Удовлетворяющим условиям

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\varphi'''(0)=\varphi'(T)=\varphi''(T)=0. \qquad (3.1.14)$$

а) Если $\mu_j-\lambda>0$, то общее решение (3.1.11) имеет вид

$$\varphi(t)=C_1e^{\gamma_j t}+C_2e^{\frac{\gamma_j t}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+C_3e^{\frac{\gamma_j t}{2}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+$$

$$C_4e^{-\gamma_j t}+C_5e^{-\frac{\gamma_j t}{2}}cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+C_6e^{-\frac{\gamma_j t}{2}}sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t \qquad (3.1.15)$$

где $\gamma_j=\left(\mu_j-\lambda\right)^{\frac{1}{6}}$. С учетом (3.1.14), числа $C_j, j=\overline{1,6}$, должны быть решением алгебраической системы

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_4+C_5=0 \\ C_1+\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-C_4-\frac{1}{2}C_5+\frac{\sqrt{3}}{2}C_6=0 \\ C_1-\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3+C_4-\frac{1}{2}C_5-\frac{\sqrt{3}}{2}C_6=0 \\ C_1-C_2-C_4+C_5=0 \\ E^2C_1+E\left(\frac{1}{2}C-\frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2+E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C+\frac{1}{2}S\right)C_3- \\ E^{-2}C_4-E^{-1}\left(\frac{1}{2}C+\frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_5+E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}S+\frac{1}{2}C\right)C_6=0 \\ E^2C_1-E\left(\frac{1}{2}C-\frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2+E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C-\frac{1}{2}S\right)C_3- \\ E^{-2}C_4+E^{-1}\left(-\frac{1}{2}C+\frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_5-E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C+\frac{1}{2}S\right)C_6=0 \end{cases}$$

где

$$E=e^{\frac{\gamma_j T}{2}}, \qquad C=cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T, \quad S=\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T.$$

Определитель этой системы будет равна

$$D\left(\gamma_j\right)=\frac{3}{2}[2E^3C-3E^2-6EC+10+4C^2-6E^{-1}C-3E^{-2}+2E^{-3}C],$$

и он не может обращаться в нуль, следовательно, в этом случае задача (3.1.13), (3.1.14) не имеет нетривиальных решений.

b) Если $\mu_j-\lambda<0$, то общее решение (3.1.13) имеет вид

$$\varphi(t)=C_1e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\cos\frac{\gamma_j t}{2}+C_2e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\sin\frac{\gamma_j t}{2}+C_3e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\cos\frac{\gamma_j t}{2}+$$

$$C_4e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\sin\frac{\gamma_j t}{2}+C_5\cos\gamma_j t+C_6\sin\gamma_j t \qquad (3.1.16)$$

где $\gamma_j=(\mu_j-\lambda)^{\frac{1}{6}}$. С учетом (3.1.14) числа $C_{j,}\, j=\overline{1,6}$, должны быть решением алгебраической системы

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_5 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + C_6 = 0 \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_4 - C_5 = 0 \\ C_2 + C_4 - C_6 = 0 \\ E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{1}{2}S\right)C_1 + E\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2 - E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_3 + \\ +E^{-1}\left(\frac{1}{2}C - \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_4 - 2CSC_5 + (C^2 - S^2)C_6 = 0 \\ E\left(\frac{1}{2}C - \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_1 + E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_2 + E^{-1}\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_3 + \\ +E^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_4 + (-C^2 + S^2)C_5 - 2CSC_6 = 0 \end{cases}$$

где

$$E = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T}, \qquad C = cos\frac{\gamma_j T}{2}, \quad S = \sin\frac{\gamma_j T}{2}.$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель этой системы

$$D_{\gamma_j} = -C^2S^2 = -\tfrac{1}{4}sin^2\gamma_j T = 0 \qquad (3.1.17)$$

обращается в нуль. Из (17) получим искомое множество собственных чисел

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_{ik}^{(1)} = \mu_{ik} + \left(\tfrac{k\pi}{T}\right)^6 \ k = 1,2,\dots \qquad (3.1.18)$$

Теорема 3.1.1 доказана.

Следствие 1. *Задача не имеет действительных собственных чисел, отличных от чисел $\lambda_{ik}^{(1)}$, из (3.1.18) и при этом семейство $\{\lambda_{ik}^{(1)}\}_{j,k=1}^{\infty}$ не имеет конечных предельных точек. Все собственные числа $\lambda_{ik}^{(1)}$ являются конечнократными.*

Доказательство. Тот факт, что задача не имеет действительных собственных чисел, отличных от чисел $\lambda_{ik}^{(1)}$, следует из базисности системы функций

$$\{\omega_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$$

в пространстве $W_2^2(\Omega)$.

Предположим, что семейство $\{\lambda_{ik}^{(1)}\}_{j,k=1}^{\infty}$ имеет конечную предельную точку. Тогда найдется семейство (j_i, k_i) пар натуральных чисел такое, что $j_i + k_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и при этом последовательность $\lambda_{ik}^{(1)}$ будет фундаментальной. Заметим, что индексы j_i, не могут быть ограниченными в совокупности, так как в этом случае выполняется $\lambda_k = \mu_{jk} + \left(\frac{k\pi}{T}\right)^6$, $k = 1,2,\dots$, чего не может быть для фундаментальной последовательности. Далее, индексы k_i также не могут быть ограниченными в совокупности, так как в этом случае последовательность $\{\mu_{j_i} - \mu_{j_{i+m}}\}$, будет ограниченной, что не имеет места. Следовательно, для индексов j_i и k_i выполняется $j_i \to \infty$, $k_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Но тогда $\lambda_{j_k k_i} \to -\infty$, что опять же не имеет места для фундаментальной последовательности.

Из проведенных рассуждений так же следует справедливость второй части следствия. Конечная кратность каждого собственного числа $\lambda_{ik}^{(1)}$ вытекает из того, что при фиксированных числах j и k равенство $\lambda_{ik}^{(1)} = \lambda_{i_1 k_1}^{(1)}$ возможно лишь для конечного набора индексов j_1 и k_1.

Следствие доказано.

Заметим, что для случая $n = 1$ собственные числа μ_j вычисляются явной форме, и тогда нетрудно привести конструктивные условия простоты каждого собственного числа $\lambda_{jk}^{(1)}$ или же предъявить примеры, в которых собственные числа будут иметь кратность, большую единицы. В общем же случае дать условия простоты также нетрудно, но, представляется, они будут не конструктивными.

Следствие 2. *К собственным числам* $\lambda_{jk}^{(1)}$ *задачи I соответствуют собственные функции*

$$u_{jk}^{(1)}(x,t) = \omega_j(x)\varphi_k^{(1)}(t),$$

где функции $\varphi_k^{(1)}(t)$ *представляются в виде*

$$\varphi_k^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{C}}{12S_k(E_k - E_k^{-1})} \times$$

$$\times \left[-(3C_k(E_k - E_k^{-1}) + 5\sqrt{3}S_k(E_k + E_k^{-1}) + 6)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t}\cos\frac{\gamma_k t}{2} -\right.$$

$$-\left(-3\sqrt{3}C_k(E_k + E_k^{-1}) - 15S_k(E_k - E_k^{-1}) + 3\sqrt{3}\right)e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t} sin\gamma_k t +$$

$$+(-3C_k(E_k + E_k^{-1}) + \left(4 + 5\sqrt{3}\right)S_k(E_k - E_k^{-1}) - 6)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t}\cos\frac{\gamma_k t}{2} +$$

$$+\left(3\sqrt{3}C_k(E_k+E_k^{-1})+15S_k(E_k-E_k^{-1})-6\sqrt{3}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t}sin\frac{\gamma_k t}{2}+$$

$$+\left(6C_k(E_k+E_k^{-1})-6\sqrt{3}S_k(E_k-E_k^{-1})+12\right)\cos\gamma_k t+$$

$$+12S_k(E_k-E_k^{-1})\sin\gamma_k t],$$

$$E_k=e^{\frac{\sqrt{3}\pi k}{2}},\qquad C_k=\cos\frac{\pi k}{2},\quad S_k=\sin\frac{\pi k}{2},\quad C=Const,\quad k=1,2,\dots$$

Теперь рассмотрим спектральную задачу II. Исследование задачи II проводится аналогично. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.2. При $\lambda>c_1,\ c_1=\min\left\{-\frac{1}{c_0},-\frac{40}{T^6}\right\}$, однородная краевая задача II имеет в пространстве V_3 только нулевое решение. На промежутке $(-\infty,c_1)$ не существует счетного множество чисел $\lambda_m^{(1)}$ таких, что при $\lambda=\lambda_m^{(1)}$ однородная краевая задача II имела нетривиальное решение.

Решение уравнения (3.1.1) ищем в виде $u(x,t)=\varphi(t)\omega_j(x)$. Тогда функция $\varphi(t)$ должна быть решением уравнения (3.1.13) удовлетворяющим условиям

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=\varphi'''(0)=\varphi''''(T)=\varphi'''''(T)=0. \qquad (3.1.19)$$

a) Если $\mu_j-\lambda>0$, то общее решение $\varphi(t)$ имеет вид
b)

$$\varphi(t)=C_1e^{\gamma_j t}+C_2e^{\frac{\gamma_j t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+C_3e^{-\frac{\gamma_j t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+$$

$$+C_4e^{-\gamma_j t}+C_5\,e^{-\frac{\gamma_j t}{2}}cos\,\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t+C_6e^{-\frac{\gamma_j t}{2}}\sin\,\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t,$$

где $\gamma_j=(\mu_j-\lambda)^{\frac{1}{6}}$. С учетом (3.1.19), числа $C_{j,}\,j=\overline{1,6}$, должны быть решением алгебраической системы

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 + C_4 + C_5 = 0 \\
C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 - C_4 - \frac{1}{2}C_5 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_6 = 0 \\
C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + C_4 - \frac{1}{2}C_5 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_6 = 0 \\
C_1 - C_2 - C_4 + C_5 = 0 \\
E^2C_1 + E\left(-\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2 - E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_3 + \\
+E^{-2}C_4 - E^{-1}\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_5 + E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{1}{2}S\right)C_6 = 0 \\
E^2C_1 + E\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2 + E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_3 - \\
E^{-2}C_4 + E^{-1}\left(-\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_5 - E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_6 = 0
\end{cases}
$$

где

$$
E = e^{\frac{\gamma_j T}{2}}, \qquad C = \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T\,, \quad S = \sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T.
$$

Определитель этой системы будет равна

$$
D(\gamma_j) = -\frac{3}{2}[2E^3C + 3E^2 + 6EC + 10 + 4C^2 + 6E^{-1} + 3E^{-2} + 2E^{-3}C],
$$

Он не может обращаться в нуль, следовательно, в этом случае нетривиальных решений нет.

c) Если $\mu_j - \lambda < 0$, то функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$
\varphi(t) = C_1 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t} cos\frac{\gamma_j t}{2} + C_2 e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\sin\frac{\gamma_j t}{2} + C_3 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\cos\frac{\gamma_j t}{2} +
$$

$$
+C_4 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j t}\sin\frac{\gamma_j t}{2} + C_5\, cos\,\gamma_j t + C_6 \sin\gamma_j t,
$$

где $\gamma_j = (\mu_j - \lambda)^{\frac{1}{6}}$. В этом случае числа $C_{j,}\, j = \overline{1{,}6}$, должны быть решением алгебраической системы

$$\begin{cases} C_1 + C_3 + C_5 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + C_6 = 0, \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}C_4 - C_5 = 0, \\ C_2 + C_4 - C_6 = 0, \\ -E\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_1 + E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{1}{2}S\right)C_2 + E^{-1}\left(-\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_3 - \\ -E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_4 + (C^2 - S^2)C_5 + 2CSC_6 = 0, \\ -E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C + \frac{1}{2}S\right)C_1 + E\left(\frac{1}{2}C - \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_2 + E^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}C - \frac{1}{2}S\right)C_3 + \\ +E^{-1}\left(\frac{1}{2}C + \frac{\sqrt{3}}{2}S\right)C_4 - 2CSC_5 + (C^2 - S^2)C_6 = 0. \end{cases}$$

где

$$E = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_j T}, \qquad C = \cos\frac{\gamma_j T}{2}, \quad S = \sin\frac{\gamma_j T}{2}.$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если определитель этой системы

$$D(\gamma_j) = \frac{3}{4}[E^2 + 8EC^3 + 6 + 12C^2 + 8E^{-1}C^3 + E^{-2}],$$

также не обращается в нуль.

Отсюда заключаем, что задача II не имеет действительных собственных чисел $\lambda_{jk}^{(2)}$. Теорема 3.1.2 доказана.

Результаты этого подраздела опубликовано в работе [11].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования свойств корректности краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных важны как в теоретическом плане, так и для приложения в различных прикладных задачах физики, механики и моделирования.

Теория краевых задач для квазигиперболических уравнений высокого порядка относятся к уравнениям Соболевского типа. В настоящее время они привлекают особые внимания математиков.

А также интерес представляют локальные и нелокальные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(.)-A$ с произвольным эллиптическим оператором A.

В данной диссертационной работе исследованы дифференциальные уравнения следующего вида

$$Lu \equiv (-1)^p \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + \Delta u + c(x,t)u = \lambda u + f(x,t), \qquad x \in \Omega, t \in (0,T),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n, t \in (0,T), 0 < T < +\infty, p -$ натуральное число, $\lambda -$ действительное число, $c(x,t)$, $f(x,t) -$ заданные функций.

Эти уравнения относятся к уравнениям Соболевского типа и называются квазигиперболическими уравнениями высокого порядка. Для этого уравнения исследуются локальные и нелокальные краевые задачи в случае четвертого и шестого порядков.

В данной диссертационной работе получены следующие научные результаты:

1. Даны постановки и установлены теоремы единственности и существования решения нелокальных краевых задач с интегральными условиями по временной переменной для квазигиперболических уравнений четвертого порядка;
2. Даны постановки и установлены теоремы единственности и существования решения новых краевых задач для квазигиперболических уравнений четвертого порядка;
3. Установлена разрешимость нелокальной краевой задачи для гиперболического уравнения с оператором четвертого порядка по пространственному переменному.
4. Установлены теоремы единственности и существования нелокальных краевых задач для квазигиперболических уравнений шестого порядка;
5. Установлены влияния спектрального параметра λ на разрешимости нелокальных краевых задач для квазигиперболических уравнений шестого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Врагов В.Н. К теории краевых задах для уравнений смешанного типа // Дифференциальное уравнения. –1977. – Т. 13. №6. – С. 1098-1105.

2 Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задах для уравнений смешанного типа. / Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 5-13.

3 Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. – Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995. –133 с.

4 Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Математические заметки, – 2017, – Т.101, №3. – С. 403-412.

5 Кожанов А.И., Шарин Е.Ф. Задача сопряжения для некоторых неклассических дифференциальных уравнений высокого порядка // Украинский математический вестник. – 2014. – Т. 11, №2. – С. 181-202.

6 Егоров И.Е. О краевой задаче для уравнения смешанного типа со спектральным параметром // Мат. заметки СВФУ. – 2014. – Т.21, №1. – С. 11-17.

7 Pinigina N.R. On the question of the correctness of boundary value problems for non-classical differential equations of high order // Asian – European Journal of Mathematics. – 2017. – Vol.10. №1.

8 Терехов А.Н. Краевая задача для уравнения смешанного типа. Применение методов функционального анализа к решению задач математической физики и вычислительной математики // Сб. научн. тр. ин-та матем. АН СССР, Новосибирск, 1979, 128 – 137.

9 Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 842-853.

10 Кожанов А.И., Кошанов Б.Д., Султангазиева Ж.Б. Новые краевые задачи для квазигиперболического типа четвертого порядка // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1410-1436.

11 Кошанов Б.Д., Султангазиева Ж.Б., Емир Кады оглу А.Н., Сматова Г.Д. Спектральная задача для неклассических дифференциальных уравнений шестого порядка // Вестник Карагандинского университета имени Е.А. Букетова. Серия «Математика». – 2020. – Т. 97, №1. - С. 17-25.

12 Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure and Appl. Math. – 1962. –Vol. 15. Issue 2. P. 119-143.

13 Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – Т.15, №2. – С. 97-154.

14 Ашуров А.А., Мухиддинова А.Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка // Вестник КРАУНЦ Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 30, №1. – С. 8-19.

15 Тихонов И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известие РАН. Серия «Математика». – 2003. – Т. 67, №2. – С. 133-166.

16 Попов А. Ю., Тихонов И. В. Классы единственности в нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, №3. – С. 396-405.

17 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения высокого порядка $l(\cdot) - A$ с волновым оператором A со смещением // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т.63, - №6. – С. 1266 -1275.

18 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. - 528 с.

19 Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, –1968. – 427 с.

20 Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. –М.: ИЛ, 1957. – 320 с.

21 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. –164 с.

22 Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д. Критерии единственности решения нелокальной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $l(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A // Дифференцые уравнения – 2023. – Т.59, - №1. – С. 4-14.

23 Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми // Дифференцые уравнения – 1983. – Т. 19, №1. – С. 66-75.

24 Кальменов Т.Ш. Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Дифференцые уравнения – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 75-78.

25 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional differential equations // 2006. – Elsevier. – 541 p.

26 Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Uniqueness Criteria for Solving a Time Nonlocal Problem for a High-Order Differential Operator Equation $l(\cdot) - A$ with a Wave Operator with Displacement // Simmetry – 2022 – 14(6).

27 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. –1964. – № 2. – С. 82-93.

28 Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач / Труды МИАН. 2000. - Т. 229. №3. –175 с.

29 Grisvard P. Equations operaationnelles abstraites et problemes aux limites // Ann. Scuola norm. super. Pisa. –1967. – Vol. 21, №3. – P. 308-347.

30 Дубинский Ю.А. Об одной абстрактной теореме и ее приложениях к краевым задачам для неклассических уравнений // Математический сборник – 1969. –Т. 79(121), №1. – С. 91-117.

31 Романко В.К. Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов // Дифференциальное уравнение – 1974. – Т. 10, №1. – С. 117-131.

32 Орынбасаров М.О. О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №1. – С. 151-161.

33 Шелухин В.В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений // Сиб. Мат. Журнал. –1991. –Т. 32, №2. – С. 154-165.

34 Шелухин В.В. Задача о прогнозе температуры океана по средним данным за предшествующий период времени // Доклады РАН. – 1992. –Т.324, № 4, – С. 760-764.

35 Ashyralyev A., Agges N. Nonlocal boundary value hyperbolic problems involving integral conditions // Boundary value problems. – 2014. – С. 205

36 Пулькина Л.С. Задача с нелокальным начальным условием для волнового уравнения // Тезисы докладов межд. конф. – «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» памяти академика А.А.Самарского, 2014. – С.187-189.

37 Кириченко С.В. Об одной задаче с нелокальным по переменной времени условием для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. – 2018. – Т. 24, №4. – С. 24-28.

38 Зорич В.А. Математический анализ: Учебник. Ч. II. М.: Наука, 1984. - 640 с.

39 Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. - 320 с.

40 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. –Наука, М., – 1988.

41 Треногин В.А. Функциональный анализ. – Наука, М., – 1980.

42 S.S. Sobolev, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Translations of Mathematical Monographs, 90, Providence, RI: American Mathematical Soc., – 1991.

43 Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Наука, М., – 1973.

44 Lions J.L., Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems. – Moscow: Mir, – 1973.

45 Evans L.C. Partial Differential equations. – American Mathematical Soc., Providence, Rhode Island, – 2003.

46 Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Каравцов В.В., Лекции по математической физике. – М.: Наука, – 2004.

47 Соболев С.С. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, – 1988.

48 Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. – 2008. – V. 53, №2. – P. 177-183.

49 Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a sphere // Siberian Mathematical Journal. – 2008. – V. 49, №3. – P.423-428.

50 Кошанов Б.Д. Функция Грина и корректные сужения полигармонического оператора // Вестник КазНУ, Серия «Математика». – 2021. – Т. 109, №1.

51 Кошанов Б.Д., Байарыстанов А.О., Досмағұлова К.А., Кунтуарова А.Д, Султангазиева Ж.Б. On the Schwarz problem for the Moisil-Teodorescu system in a

spherical layer and in the interior of a torus // Вестник КазНУ имени Аль-Фараби. Серия «Математика». – 2022. – №2(114), –С. 35-42

51 Кошанов Б.Д., Каһарман Н, Султангазиева Ж.Б., Сегізбаева Р.У. Two theorems on estimates for solutions of one class of nonlinear equations in a finite-dimensional space // Вестник Карагандинского университета имени Е.А.Букетова. Серия «Математика». – 2022 – №3(107) – С.70-84.